

基于混合 C-谱的 K-终端网络置换重要度计算方法

杜永军^{1,2}, 郭雅琪², 蔡志强², 张攀²

(1.兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050; 2.西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

摘 要:重要度可以量化网络边对整个网络可靠性(故障)的影响程度,而 C-谱是研究网络可靠性及重要度的一个有力工具。假设网络中每条边具有相同的可靠性,将二态关联系统中的传统置换重要度推广到 K-终端网络,设计了基于混合 C-谱的蒙特卡罗算法来评估该重要度。理论分析表明:当网络具有某种特殊结构或者边的可靠性足够大时,网络边的置换重要度排序仅依赖于网络结构,而与边的可靠性无关。最后,结合算例演示了如何利用传统置换重要度评估 K-终端网络中网络边的重要程度。

关 键 词:K-终端网络;置换重要度;混合 C-谱;蒙特卡罗
中图分类号:N945.17 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-2758(2019)05-0897-06

由于网络在社会生活中扮演了重要的角色,所以网络可靠性和重要度吸引了许多学者的关注。网络一般由节点和边组成,其中节点表示道路交叉口、控制中心等,而边表示通讯电缆、道路等。在 K-终端网络中,一部分节点称为终端,网络运行当且仅当所有终端被一些运行的边连通。假设节点绝对可靠,而边以某种概率发生故障,边故障可能导致整个网络处于故障状态。因此 K-终端网络可靠性被定义为网络中所有终端彼此连通的概率^[1]。

网络可靠性分析的目的是识别网络瓶颈和量化网络边的故障(运行)对整个网络的影响程度。作为一种可靠性分析工具,重要度提供了数值指标,能够量化不同的边对网络可靠性(故障)的影响程度,从而对网络的边进行排序。在二态关联系统领域,常见的重要度包括 Birnbaum-重要度^[2-3]、FV-重要度^[4-5]、贝叶斯-重要度^[6]、集成重要度^[7-8]、置换重要度^[9-10]。在网络领域,Page 和 Perry^[11]引进了可靠性多项式去量化网络边的相对重要性。对于一类可约网络,Hsu 等人^[12]设计了一种“两阶段”算法评估网络边的重要度。该算法第一阶段执行网络化简;第二阶段跟踪化简步骤和评估边的重要度。Hong 等人^[13]提出了 2 条边的联合重要度。该联合重要度考虑了 2 条边的互动对整个网络可靠性的影响。

对于中等或大型网络,网络重要度的理论分析和精确计算之间存在着巨大的鸿沟^[1]。因此,一般采用数值近似的方法评估网络边的重要度。当网络中的每条边有相同的可靠性时,Gertsbak 等人^[14-17]将传统的 FV-重要度、Birnbaum-重要度、以及联合重要度推广到 K-终端网络,设计了基于网络谱的蒙特卡罗方法评估这些重要度。网络谱分为 D-谱和 C-谱,分别与网络的割集和路集紧密相关。由于它们的值都仅依赖于网络结构,故称为结构不变量。本文将传统的置换重要度推广到 K-终端网络。在二态关联系统背景下,传统的置换重要度通过枚举所有割集或者路集的方法评估了系统组件的重要度。然而,由于 K-终端网络结构的复杂性,本文提出了 2 条边的混合 C-谱的概念,并设计了基于混合 C-谱的蒙特卡罗算法评估网络边的置换重要度。研究结果表明,当网络拥有一定的特殊结构,或者网络边的可靠性足够大时,基于置换重要度的网络边的排序仅依赖于网络结构,与边的可靠性无关。

1 基本概念和定义

本文研究 K-终端网络(简称网络),该网络是一个由节点和边构成的无向图 $N = (V, E, K)$ 。 V 是网络中节点的集合, E 是网络边的集合且 $|E| = n$, $K(K \subseteq V)$ 是由一些特殊节点构成的集合,称为网络终端集合。针对由二态边组成的二态网络,令二态变量 $x_i = 1(0)$ 表示边 i 处于运行(故障)状态。边 i 的可靠性为 p_i , 即 $p_i = P(x_i = 1)$ 。结构函数 $\varphi(x)$ 确定网络状态, 这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。 $\varphi(x) = 1(0)$ 表示网络处于运行(故障)状态。网络运行当且仅当所有终端被一条路连通。路为若干运行边的集合,其连通网络所有终端。网络可靠性定义为该网络处于运行状态的概率,即 $R = P(\varphi(x) = 1) = R(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 。

假设网络所有边的故障相互独立且有相同可靠性。在此背景下,网络可靠性和重要度可利用基于 C-谱的方法去评估。C-谱的定义如下^[1]:

假设网络所有边处于故障状态,令 $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ 为网络边集 E 的一个随机置换。沿着该置换 π , 从左到右依次“复活”各个边。当边 i_j “复活”时(即该构造过程的第 j 步),令 f_j 为网络“复活”的概率。离散概率向量 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ 称为网络的 C-谱。网络累积 C-谱定义为: $F(k) = f_1 + f_2 + \dots + f_k$, 这里 $k = 1, 2, \dots, n$ 。令 $B(k)$ 为恰包含 k 条边的路的数目,则下列公式成立^[1]:

$$F(k) = B(k) \binom{n}{k}^{-1} \quad (1)$$

由此,当随机的恰有 k 条边运行时, $F(k)$ 可解释为网络处于运行状态的概率。注意这里的 C-谱仅依赖于给定网络的结构,故称为结构不变量。固定边 i , 恰含有 k 条边的所有路可分为 2 类:一类包含边 i , 一类不包含边 i 。因而 $B(k)$ 可拆成两部分,如下

$$B(k) = B(k, 1_i) + B(k, 0_i) \quad (2)$$

式中, $B(k, 1_i)(B(k, 0_i))$ 表示恰含有 k 条运行边的路的数目,其中边 i 运行(故障)。公式(2)代入公式(1)后, $F(k)$ 亦可拆成两部分,如下

$$F(k) = F(k, 1_i) + F(k, 0_i) \quad (3)$$

式中

$$F(k, 1_i) = B(k, 1_i) \binom{n}{k}^{-1} \quad (4)$$

$$F(k, 0_i) = B(k, 0_i) \binom{n}{k}^{-1} \quad (5)$$

由公式(4)~(5),当随机恰有 k 条边运行时, $F(k, 1_i)(F(k, 0_i))$ 可解释为网络处于运行状态,且边 i 运行(故障)的概率。称 $F(k, 1_i), F(k, 0_i)$ 为网络边 i 的 C-谱^[1]。

进一步,记 $B(k, 1_i, 0_j)(B(k, 0_i, 1_j))$ 表示恰含有 k 条边的路的数目,其中边 i 运行(故障),边 j 故障(运行)。相似于公式(4)~(5),令

$$F(k, 1_i, 0_j) = B(k, 1_i, 0_j) \binom{n}{k}^{-1} \quad (6)$$

$$F(k, 0_i, 1_j) = B(k, 0_i, 1_j) \binom{n}{k}^{-1} \quad (7)$$

根据公式(6)和(7),当随机恰有 k 条边运行时, $F(k, 1_i, 0_j)(F(k, 0_i, 1_j))$ 可解释为网络处于运行状态,且边 i 运行(故障),边 j 故障(运行)的概率。称 $F(k, 1_i, 0_j), F(k, 0_i, 1_j)$ 为网络边 i, j 的混合 C-谱。

在网络 N 中,对于给定的一条边 j ,删除边 j 得到子网络 $N - j$;收缩边 j 为一个新节点,得到子网络 $N * j$ 。若收缩的边 j 邻接的节点有网络 N 的终端,则边 j 收缩后的新节点为子网络 $N * j$ 的终端。 $F_N(k), F_{N-j}(k), F_{N*j}(k)$ 分别表示网络 N , 子网络 $N - j$, 子网络 $N * j$ 的累积 C-谱。以此类推,网络 N 、子网络 $N - j$ 、以及子网络 $N * j$ 的边的 C-谱和两条边混合 C-谱可类似表示。

下面的定理揭示了网络边的混合 C-谱,边的 C-谱,以及网络累积 C-谱之间的关系。

定理 1 给定一个由 n 条边组成的网络 N , 下面的结论成立

$$F_N(k+1, 1_j, 0_i) = \frac{k+1}{n} (F_{N*j}(k) - F_{N*j}(k, 1_i)) \quad (8)$$

$$F_N(k, 0_j, 1_i) = \frac{n-k}{n} F_{N-j}(k, 1_i) \quad (9)$$

式中, $k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ 。

证明 在网络 N 中,若已知边 j 运行,则收缩边 j ,由路的定义,得下面公式

$$B_{N*j}(k) = B_N(k+1, 1_j) \quad (10)$$

$$B_{N*j}(k, 1_i) = B_N(k+1, 1_j, 1_i) \quad (11)$$

式中, $k = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ 。

在网络 N 中,恰含有 $k + 1$ 条边且包含边 j 的所有路可分为 2 类:一类包含边 i ,一类不包含边 i 。故下列公式成立

$$B_N(k + 1, 1_j, 0_i) = B_N(k + 1, 1_j) - B_N(k + 1, 1_j, 1_i) \tag{12}$$

公式(10)和(11)代入(12)式,得到下面公式
 $B_N(k + 1, 1_j, 0_i) = B_{N*j}(k) - B_{N*j}(k, 1_i)$ (13)
根据 C-谱的定义(即公式(7),(1),(4)),公式(13)可等价写为

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} F_N(k+1, 1_j, 0_i) = \\ \binom{n-1}{k} F_{N*j}(k) - \binom{n-1}{k} F_{N*j}(k, 1_i) \end{aligned} \tag{14}$$

从公式(14)解出 $F_N(k + 1, 1_j, 0_i)$ 后,得到公式(8)。

另外,当边 j 故障,则从网络 N 中删除边 j 后,由路的定义,下列公式成立

$$B_{N-j}(k, 1_i) = B_N(k, 0_j, 1_i) \tag{15}$$

根据 C-谱的定义(即公式(4),(6)),公式(15)可以等价的写为

$$\binom{n-1}{k} F_{N-j}(k, 1_i) = \binom{n}{k} F_N(k, 0_j, 1_i) \tag{16}$$

从公式(16)解出 $F_N(k, 0_j, 1_i)$,可得公式(9)。从而定理得证。

注意 当网络 N 只含有 2 个终端时,如果边 j 本身为一条路时($\{j\}$ 称为网络 N 的单边路),则 $B_N(1, 1_j, 0_i) = 1$;否则 $B_N(1, 1_j, 0_i) = 0$ 。从而根据混合 C-谱的定义(见公式(7)),有下列公式成立

$$\begin{aligned} F_N(1, 1_j, 0_i) &= \binom{n}{1}^{-1} B_N(1, 1_j, 0_i) = \\ &\begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{当 } j \text{ 为单边路} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

2 基于混合 C-谱的置换重要度

在解决关联系统的冗余分配问题时,Boland 等人^[10]提出了置换重要度。对于关联系统的任意 2 个组件 i 和 j ,如果 $R(1_i, 0_j, \mathbf{p}) > R(0_i, 1_j, \mathbf{p})$,则称组件 i 比组件 j 更重要,记为 $i > j$,其中 $R(1_i, 0_j, \mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 \mid x_i = 1, x_j = 0), R(0_i, 1_j, \mathbf{p}) = P(\varphi(\mathbf{x}) = 1 \mid x_i = 0, x_j = 1)$ 。

给定一个由 n 条边构成的 K-终端网络,假设所

有边有共同的可靠性 $p(q = 1 - p)$ 。对于该网络任意的 2 条边 i 和 j ,根据全概率公式,得下面公式

$$R(1_i, 0_j, p) = \sum_{k=1}^{n-2} B(k, 1_i, 0_j) p^k q^{n-k-2} \tag{18}$$

公式(6)代入公式(18)后,得下面公式

$$R(1_i, 0_j, p) = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} F(k, 1_i, 0_j) p^k q^{n-k-2} \tag{19}$$

同理,由全概率公式,下列公式成立

$$R(0_i, 1_j, p) = \sum_{k=1}^{n-2} B(k, 0_i, 1_j) p^k q^{n-k-2} \tag{20}$$

公式(7)代入公式(20)后,得下面公式

$$R(0_i, 1_j, p) = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} F(k, 0_i, 1_j) p^k q^{n-k-2} \tag{21}$$

比较公式(19)和(21),得下面定理。
定理 2 给定一个由 n 条边组成的 K-终端网络。对于该网络任意的 2 条边 i 和 j ,下面的结论成立:

- 1) 若 $F(k, 1_i, 0_j) \geq F(k, 0_i, 1_j) (F(k, 1_i, 0_j) \leq F(k, 0_i, 1_j))$ 对一切 $k = 1, 2, \dots, n - 2$ 成立,且对某个 k ,不等式严格成立,则 $i > j (i < j)$ 对一切 $p \in (0, 1)$ 成立。
- 2) 令 $m = \max \{ k \mid F(k, 1_i, 0_j) \neq F(k, 0_i, 1_j) \}$ 。若 $F(m, 1_i, 0_j) > F(m, 0_i, 1_j)$,则对于充分大的 $p, i > j$ 成立。

证明
1) 由置换重要度定义, $i > j$ 当且仅当 $R(1_i, 0_j, p) > R(0_i, 1_j, p)$,即 $R(1_i, 0_j, p) - R(0_i, 1_j, p) > 0$ 。将公式(19)与公式(21)作差相减后,只须证明下列不等式成立

$$\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} (F(k, 1_i, 0_j) - F(k, 0_i, 1_j)) p^k q^{n-k-2} > 0 \tag{22}$$

由于 $F(k, 1_i, 0_j) \geq F(k, 0_i, 1_j)$ 对一切 $k = 1, 2, \dots, n - 2$ 成立,故公式(22)对一切 $p \in (0, 1)$ 成立。从而得证。

2) 根据 m 的定义和公式(22), $i > j$ 当且仅当下列不等式成立

$$\sum_{k=1}^m \binom{n}{k} (F(k, 1_i, 0_j) - F(k, 0_i, 1_j)) p^k q^{n-k-2} > 0 \tag{23}$$

注意当 $p \rightarrow 1$ (即 $q \rightarrow 0$) 时,单项式 $(F(k, 1_i, 0_j) - F(k, 0_i, 1_j)) p^k q^{n-k-2} \rightarrow 0$ 。($n - k - 2$) 越大(即 k 越小),该单项式趋向于 0 越快。故由 m 定义,当 q

表 2 边 $3,i$ 的混合 C-谱 $F(k,1_3,0_i)$

k	$1_3,0_1$	$1_3,0_2$	$1_3,0_4$	$1_3,0_5$	$1_3,0_6$	$1_3,0_7$	$1_3,0_8$	$1_3,0_9$	$1_3,0_{10}$	$1_3,0_{11}$	$1_3,0_{12}$
1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
4	0.006 1	0.008 1	0.004 0	0.006 1	0.008 1	0.008 1	0.010 1	0.002 0	0.010 1	0.008 1	0.010 1
5	0.032 8	0.039 1	0.025 3	0.032 8	0.037 9	0.036 6	0.050 5	0.016 4	0.048 0	0.037 9	0.049 2
6	0.102 8	0.111 5	0.086 6	0.100 6	0.101 7	0.098 5	0.134 2	0.069 3	0.122 3	0.101 7	0.126 6
7	0.200 8	0.208 3	0.178 0	0.191 9	0.185 6	0.186 9	0.223 5	0.174 2	0.214 6	0.185 6	0.209 6
8	0.230 3	0.232 3	0.216 2	0.220 2	0.218 2	0.218 2	0.236 4	0.216 2	0.234 3	0.218 2	0.232 3
9	0.204 5	0.204 5	0.200 0	0.200 0	0.200 0	0.200 0	0.204 5	0.200 0	0.204 5	0.200 0	0.204 5
10	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5	0.151 5
11	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3	0.083 3

事实上,第一组边 $\{1,4,5\}$ 有一个共同的特性:与这些边邻接的一个节点为终端,而相邻的另外一个节点距离其他 2 个终端的距离都为 1。第二组边 $\{2,3,6,7,9,11\}$ 的共同特性:与这些边邻接的一个节点为终端,而相邻的另外一个节点距离其他某一个终端的距离为 1。其余为第三组边 $\{8,10,12\}$ 。

4 结 论

本文将二态关联系统的置换重要度推广到 K-

终端网络。假设每条边的可靠性相同,本文提出混合 C-谱的概念,给出 K-终端网络的边的置换重要度的计算方法。理论分析认为,当网络具有某种特殊结构或者边的可靠性足够大时,网络边的置换重要度排序仅依赖于网络结构。数值计算结果表明,基于混合 C-谱的计算方法能有效评估网络边的置换重要度。本文结果有助于进一步理解 K-终端网络,并为网络可靠性优化提供了基础。

参考文献:

[1] GERTSBAKH I B, SHPUNGIN Y. Models of Network Reliability: Analysis, Combinatorics, and Monte Carlo[M]. Boca Rato, Florida, USA, CRC Press, 2009

[2] KAMALJA K K, AMRUTKAR K P. Reliability and Reliability Importance of Weighted-r-within-Consecutive-k-out-of-n: F System[J]. IEEE Trans on Reliability, 2018, 67(3): 951-969

[3] BIRNBAUM Z W. On the Importance of Different Components in a Multicomponent System Multivariate Analysis II [M]. New York, Academic Press, 1969: 581-592

[4] VESELY W E. A Time-Dependent Methodology for Fault Tree Evaluation[J]. Nuclear Engineering and Design, 1970, 13(2): 337-360

[5] FUSSELL J B. How to Hand-Calculate System Reliability and Safety Characteristics[J]. IEEE Trans on Reliability, 1975, 24(3): 169-174

[6] BHATTACHARYA D, ROYCHOWDHURY S. Bayesian Importance Measure-Based Approach for Optimal Redundancy Assignment[J]. American Journal of Mathematical and Management Sciences, 2016, 35(4): 335-344

[7] DUI Hongyan, SI Shubin, RICHARD C M Y. A Cost-Based Integrated Importance Measure of System Components for Preventive Maintenance[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 168: 98-104

[8] 司书宾,杨柳,蔡志强,等. 二态系统组(部)件综合重要度计算方法研究[J]. 西北工业大学学报, 2011, 29(6): 939-947

SI Shubin, YANG Liu, CAI Zhiqiang, et al. A New and Efficient Computation Method of IM (Integrated Importance Measures) for Components in Binary Coherent Systems[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2011, 29(6): 939-947 (in Chinese)

- [9] KUO W, PRASAD V R, TILLMAN F A, et al. Optimal Reliability Design: Fundamentals and Applications[M]. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2006
- [10] BOLAND P J, PROSCHAN F, TONG Y L. Optimal Arrangement of Components via Pairwise Rearrangements[J]. Naval Research Logistics, 1989, 36(6): 807-815
- [11] PAGE L B, PERRY J E. Reliability Polynomials and Link Importance in Networks[J]. IEEE Trans on Reliability, 1994, 43(1): 51-58
- [12] HSU S J, YUANG M C. Efficient Computation of Marginal Reliability-Importance for Reducible Networks[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2001, 50(1): 98-106
- [13] HONG J S, LIE C H. Joint Reliability-Importance of Two Edges in an Undirected Network[J]. IEEE Trans on Reliability, 1993, 42(1): 17-23
- [14] DU Y J, SI S B, GAO H Y, et al. Birnbaum Importance Measure of Network Based on C-Spectrum under Saturated Poisson Distribution[C]//2017 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, Singapore, 2017: 934-938
- [15] 杜永军, 侯沛勇, 郭雅琪. 基于饱和泊松分布的网络边的 Birnbaum 重要度计算方法[J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(5): 870-875
DU Yongjun, HOU Peiyong, GUO Yaqi. Network Birnbaum Importance Measure under Saturated Poisson Distribution[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(5): 870-875 (in Chinese)
- [16] GERTSBAKH I, SHPUNGIN Y. Network Reliability Importance Measures: Combinatorics and Monte Carlo Based Computations [J]. WSEAS Trans on Computers, 2008, 7(4): 216-227
- [17] GERTSBAKH I B, SHPUNGIN Y. Combinatorial Approach to Computing Component Importance Indexes in Coherent Systems [J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2012, 26(1): 117-128

K-Terminal Network Permutation Importance Measure Based on Mixture C-Spectrum

DU Yongjun^{1,2}, GUO Yaqi², CAI Zhiqiang², ZHANG Pan²

(1.School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
2.School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The construction spectrum (C-spectrum) is often used to exploit the network reliability and importance measure. It depends only on the network structure and hence called structure invariant. Importance measure can be used to quantify the criticality of edge within a network. This paper aim at generalizing the traditional permutation importance measure to accommodate the case of K-terminal network in which all the edges fail with independent and equal probability. A concept for mixture C-spectrum is introduced to evaluate the permutation importance measure of edges. It is proved that the rankings according to the permutation importance measure depend only on the network structure through the mixture C-spectrum when the network has special structure or the reliability of edge is sufficient large. Finally, numerical experiment show that the Monte Carlo algorithm based on the mixture C-spectrum can be efficiently used to evaluate the permutation importance measure.

Keywords: K-terminal network; permutation importance measure; mixture C-spectrum; Monte Carlo