

基于 CS-FEM 的可膨胀软材料三维增长模拟

彭帆¹, 黄玮², 马玉娥², 郭雯²

(1.长安大学 理学院, 陕西 西安 710061; 2.西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘 要:基于单元域光滑有限元方法建立了可膨胀软材料大变形增长的三维数值模拟框架,给出了变形梯度的乘法分解格式,选用第二 P-K 应力和格林应变张量作为功共轭对,推导了软材料刚度矩阵和几何刚度矩阵的数学表达式。基于 MATLAB 平台实现了所建立的数值方法,分别模拟了可膨胀软材料的各向同性、各向异性增长行为。结果显示,相比各向同性增长,各向异性增长会抑制可膨胀软材料的变形。模拟结果与已有文献计算结果进行比较,比较结果显示形态模式的变化特征和规律吻合较好,证明了该数值框架在模拟可膨胀软材料大变形增长行为方面的有效性,有助于揭示自然界植物生长现象背后的力学机制。

关 键 词:大变形;光滑有限元;软材料;增长力学

中图分类号: O341

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2023)01-0136-08

生物组织和水凝胶等可膨胀软材料,具有许多突出的性能,比如对外界刺激的敏感性、大变形和可逆变形的能力以及离子导电性等。基于这些特性,它们已被应用于许多工程领域^[1]。叶子、花瓣等软生物组织的生长是常见的自然现象。增长场的不均匀性和不兼容性,使得这些生物软组织发生几何形状和形态模式上的改变^[2]。为了刻画软材料增长的动力学和热力学过程,Ganghoffer^[3]提出了基于无应力构型的连续增长理论,将变形前后构型的映射分解成增长映射和弹性映射,即变形梯度乘法分解成弹性部分和增长部分。基于变形梯度的乘法分解,学者们建立了相应的数值求解框架,采用数值方法对生物软组织和水凝胶的增长进行了研究。

Wang 等^[1]借助非均匀有理 B 样条单元,建立了模拟可膨胀软材料增长的等几何计算框架。这个计算框架在分析仿生结构和设计仿生器件的力学行为方面也具有很大的潜力。Zheng 和 Wang 等^[4-5]提出了基于实体-壳单元的非线性有限元框架来对薄壁软结构的生长以及含增强纤维的水凝胶各向异性膨胀进行数值分析。Kadapa 等^[2]基于高阶单元建

立了混合有限元框架来模拟可压缩和不可压缩软材料的生长和变形。

然而软材料增长的数值模拟会涉及大变形,采用有限元等方法求解会出现网格畸变使得迭代求解过程出现发散(数值奇异)。为了有效地改善这一情况,需采用基于欧拉描述的无网格方法或其他对网格畸变不敏感的数值方法来对软材料的生长过程进行模拟。

光滑有限元方法相比传统有限元方法,不需要对任意形状的网格单元进行等参变换,将体(面)积分转化成面(线)积分,对网格畸变具有一定免疫性,在模拟大变形方面更具优势。此外,光滑有限元方法从理论上被证明拥有比传统有限元方法更小的刚度,因而精确性更高^[6-9]。

单元域光滑有限元(cell-based smoothed finite element method, CS-FEM)是光滑有限元方法的一种,它将每个有限元单元划分成若干个 cell,并将各个 cell 定义成光滑域。由于 CS-FEM 不存在跨网格操作,并且每个光滑域支撑点的个数相等,在程序实现和总体刚度矩阵的稀疏化处理上更为便捷。本文

收稿日期:2022-05-05

基金项目:国家自然科学基金(12172292)资助

作者简介:彭帆(1993—),长安大学讲师,主要从事计算断裂力学与生物力学研究。

通信作者:黄玮(1979—),西北工业大学副教授,主要从事结构疲劳断裂、计算力学及先进算法研究。

e-mail:huangwei@nwpu.edu.cn

基于 CS-FEM 建立了可膨胀软材料增长的数值框架,通过对软材料在不同条件下增长行为的模拟验证该数值方法的有效性。

1 基本理论

1.1 变形梯度的乘法分解和变形张量

变形前后初始构型 Ω_0 和当前构型 Ω_c 之间的映射可以用变形梯度 $\mathbf{F}$ 来描述,其定义为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (1)$$

根据文献[10]的处理方法,变形梯度可以分解成弹性变形梯度 $\mathbf{F}^e$ 和增长张量 $\mathbf{F}^g$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^g \quad (2)$$

变形体在 $\mathbf{F}^g$ 的作用下,从初始构型转化到中间构型,然后在 $\mathbf{F}^e$ 的作用下,由中间构型转换到当前构型,如图 1 所示。变形梯度行列式 J 可以表示变形前后体积微元的相对变化,根据(2)式有

$$J = J^e J^g \quad (3)$$

由(2)式和右柯西-格林应变张量的定义,可以得到右柯西-格林应变张量 $\mathbf{C}^e$ 的表达式

$$\mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e = ((\mathbf{F}^g)^{-1})^T \mathbf{C} (\mathbf{F}^g)^{-1} \quad (4)$$

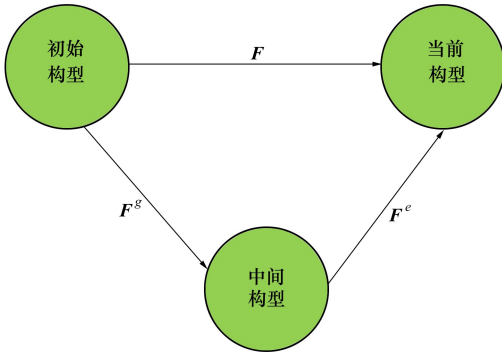


图 1 增长时的构型变化

1.2 增长过程的控制方程、弱形式及其线性化

根据文献[2]的做法,增长变形过程中的总势能泛函可以表示成中间构型 Ω_m 下弹性应变能密度 ψ^e 的积分^[11]

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_m} \psi^e(\mathbf{C}^e(\mathbf{u})) dV_m - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

式中: Π_{ext} 分别表示外力势能泛函; dV_m 表示中间构型的积分体元。中间构型与初始构型的积分体元存在(6)式所示关系

$$dV_m = J^g dV_0 \quad (6)$$

因此,总势能泛函可以表示成

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \psi^e(\mathbf{C}^e(\mathbf{u})) J^g dV_0 - \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

为了推导位移场的控制方程,将(7)式代入位移场的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} - \nabla \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \nabla \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right) = 0 \quad (8)$$

(8)式“:”表示张量的缩并, $\mathbf{b}$ 表示体力。根据超弹性材料的本构方程和变形梯度的定义,(8)式可以进一步表示成

$$\mathbf{b} - \nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (9)$$

式中, $\mathbf{P}$ 为第一 Piola-Kichhoff (P-K) 应力张量。为了推导和表示方便,将(9)式写成分量和下标形式

$$P_{iJ,J} = b_i \quad (10)$$

本节字母大写表示初始构型的坐标分量,小写表示当前构型的坐标分量。除控制方程外,还须满足以下边界条件

$$n_i P_{iJ} = f_j \quad (11)$$

式中, n_i 为初始构型面力作用积分面元法向量的分量, f_j 表示面力分量。对(7)式求变分可以得到

$$\delta \Pi = \int_{\Omega_0} P_{iJ} \delta F_{iJ} J^g dV_0 = \int_{\Omega_0} S_{IJ} \delta E_{IJ} J^g dV_0 \quad (12)$$

式中, E_{IJ} 为格林应变张量的分量,其具体表达式为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (F_{pI} F_{pJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} (C_{IJ} - \delta_{IJ}) \quad (13)$$

式中, δ_{IJ} 为二阶单位张量的分量,下标 p 为哑标。(12)式即为位移场控制方程的弱形式,对其进行线性化,有

$$\Delta \delta \Pi = \int_{\Omega_0} (\Delta S_{IJ} \delta E_{IJ} + S_{IJ} \Delta \delta E_{IJ}) J^g dV_0 \quad (14)$$

由于弹性自由能 ψ^e 是弹性变形张量的函数,所以第二 P-K 应力分量 S 和第二 P-K 弹性应力分量之间存在如下关系

$$S_{IJ} = 2 \frac{\partial \psi^e}{\partial C_{IJ}} = 2 \frac{\partial \psi^e}{\partial C_{KL}} \frac{\partial C_{KL}^e}{\partial C_{IJ}} = S_{KL}^e \frac{\partial C_{KL}^e}{\partial C_{IJ}} \quad (15)$$

将(4)式代入(15)式右边项可以进一步得到

$$S_{IJ} = \frac{1}{2} S_{KL}^e (F_{IK}^{g,-1} F_{JL}^{g,-1} + F_{IJ}^{g,-1} F_{KL}^{g,-1}) \quad (16)$$

由(15)式可以得到第二 P-K 应力增量 ΔS_{IJ} 的表达式

$$\Delta S_{IJ} = \Delta S_{KL}^e \frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}} = \frac{\partial S_{KL}^e}{\partial C_{MN}^e} \frac{\partial C_{MN}^e}{\partial C_{PQ}} \Delta E_{PQ} \frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}} =$$

$$D_{KLMN}^e \frac{\partial C_{MN}^e}{\partial C_{PQ}} \Delta E_{PQ} \frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}} = D_{IJPQ} \Delta E_{PQ} \quad (17)$$

式中: D_{KLMN}^e 为四阶弹性本构张量的分量; D_{IJPQ} 为四阶本构张量的分量, 它们存在如下关系

$$D_{IJPQ} = D_{KLMN}^e \frac{\partial C_{MN}^e}{\partial C_{PQ}} \frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}} \quad (18)$$

式中, $\frac{\partial C_{MN}^e}{\partial C_{PQ}}$ 和 $\frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}}$ 的具体表达式分别为

$$\frac{\partial C_{MN}^e}{\partial C_{PQ}} = \frac{1}{2} (F_{MP}^{g,-1} F_{NQ}^{g,-1} + F_{MQ}^{g,-1} F_{PN}^{g,-1}) \quad (19)$$

$$\frac{\partial C_{IJ}^e}{\partial C_{KL}} = \frac{1}{2} (F_{IK}^{g,-1} F_{JL}^{g,-1} + F_{IL}^{g,-1} F_{JK}^{g,-1}) \quad (20)$$

由(13)式 δE_{IJ} 可以表示为

$$\delta E_{IJ} = \frac{1}{2} (\delta F_{pI} F_{pJ} + F_{pI} \delta F_{pJ}) = \delta u_{p,I} F_{pJ} \quad (21)$$

由于位移梯度的虚增量 $\delta u_{p,I}, \delta u_{p,J}$ 是小量, 再对其取增量, 便可忽略。于是可以得到 $\Delta \delta E_{IJ}$ 的表达式

$$\Delta \delta E_{IJ} = \frac{1}{2} (\delta u_{p,I} \Delta F_{pJ} + \Delta F_{pI} \delta u_{p,J}) = \delta u_{p,I} \Delta u_{p,J} \quad (22)$$

1.3 三维 CS-FEM 的基本理论

在三维 CS-FEM 中, 将八节点六面体单元划分成 8 个光滑域, 如图 2 所示。并给出了光滑域内光滑位移梯度的定义

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}_c) = \frac{\int_{\Omega_c} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_c) d\Omega}{\int_{\Omega_c} d\Omega} = \frac{1}{V_c} \int_{\Omega_c} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_c) d\Omega \quad (23)$$

式中: $\mathbf{x}_c$ 表示光滑域中心的坐标; Ω_c 表示光滑域; V_c 表示光滑域的体积。应用散度定理可以将(23)式的体积分转化成面积分, 有

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{V_c} \int_{\Gamma_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (24)$$

式中, Γ_c 表示光滑域的外表面, 在图 2 中表示六面体光滑域的 6 个表面。光滑域中心的位移场可由该光滑域支撑点位移场通过中心处形函数插值得到, 可以将(24)式进一步表示为

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{V_c} \int_{\Gamma_c} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{node}}} N_i u_i^{\text{node}} \right) \mathbf{n} dA \quad (25)$$

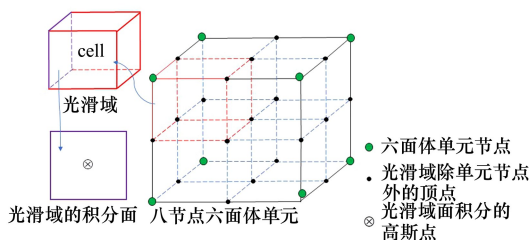


图 2 三维 CS-FEM 光滑域的划分

根据应变位移矩阵 $\mathbf{B}$ 的定义以及积分和求和算符的可互易性, 将各个光滑域对节点 i 的 $\mathbf{B}$ 矩阵表示成光滑域各个表面高斯积分的形式, 如下所示

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}_c) =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jX}^C S_j^C & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jY}^C S_j^C & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jZ}^C S_j^C \\ \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jY}^C S_j^C & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jX}^C S_j^C & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jZ}^C S_j^C & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jY}^C S_j^C \\ \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jZ}^C S_j^C & 0 & \sum_{j=1}^{n_s} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jX}^C S_j^C \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中: n_s 为光滑域积分面的数目; $N_i(\mathbf{x}_j)$ 表示第 j 个积分面的高斯点对节点 i 的形函数; $n_{jX}^C, n_{jY}^C, n_{jZ}^C$ 分别表示第 j 个积分面外法线的分量; S_j^C 表示第 j 个积分面的面积。在这里, 选取这个积分面的中心为高斯点。

2 基于 CS-FEM 的三维增长数值框架

为了模拟软材料增长过程, 需要对(9)式中的位移控制方程进行数值求解。由于位移控制方程是非线性的, 需要得到控制方程的弱形式及其线性化后的表达形式来构建非线性数值框架。为了构建 CS-FEM 求解位移场的数值框架, 需对(12)式中的弱形式和(14)式中弱形式线性化后的表达式进行

离散。首先需将光滑域中位移虚增量 $\delta \mathbf{u}$ 和位移增量 $\Delta \mathbf{u}$ 离散成如下形式

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{\text{node}}} N_i \delta \mathbf{u}_i^{\text{node}}, \quad \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{\text{node}}} N_i \Delta \mathbf{u}_i^{\text{node}} \quad (27)$$

为了表达方便,需借助 Voigt 规则将二阶张量 $\mathbf{S}$ 和 $\delta \mathbf{E}$ 表示成矢量形式,如下所示

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta E_{33} \\ 2\delta E_{12} \\ 2\delta E_{23} \\ 2\delta E_{13} \end{bmatrix} \quad (28)$$

由(20)式和(25)式,可以将(28)式中 $\delta \mathbf{E}$ 进一步离散成

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{B}_i(\mathbf{x}_c) \mathbf{F}) \delta \mathbf{u}^{\text{node}} = \mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c) \delta \mathbf{u}^{\text{node}} \quad (29)$$

同理 $\Delta \mathbf{E}$ 可以离散成

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c) \Delta \mathbf{u}^{\text{node}} \quad (30)$$

将(27)~(28)式代入(12)式中,并两边同除以 $\delta \mathbf{u}^{\text{node}}$ 可得到位移场残差力 $\mathbf{R}_i^u(\mathbf{x}_c)$ 的表达式

$$\mathbf{R}_i^u(\mathbf{x}_c) = - \int_{\Omega_b} [\mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c)]^T \mathbf{S} J^g dV_o \quad (31)$$

同理可以将(14)式中右边第二项离散成

$$\mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} = (\Delta \mathbf{u}^{\text{node}})^T \cdot [\mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c)]^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c) \cdot \Delta \mathbf{u}^{\text{node}} \quad (32)$$

(32)式 $\mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c)$ 的分量表达式为

$$\mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_S} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jX}^c S_j^C \\ \sum_{j=1}^{n_S} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jY}^c S_j^C \\ \sum_{j=1}^{n_S} N_i(\mathbf{x}_j) n_{jZ}^c S_j^C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$\bar{\mathbf{S}}$ 的分量表达式为

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \hat{S} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

在对(14)式中右边第一项进行离散化时,需要得到(18)式中 D_{KLMN}^e 的表达式,同时有必要将本构张量 $\mathbf{D}$ 写成矩阵形式。本文选用 Neo-Hookean 本构模型,它的弹性能密度 ψ^e 表达式为

$$\psi^e = \frac{\mu}{\beta} [(J^e)^{-\beta} - 1] + \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\mathbf{C}^e) - 3]$$

$$\beta = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \quad (35)$$

对应的第二 P-K 弹性应力张量 $\mathbf{S}_{IJ}^e$ 的表达式为

$$\mathbf{S}_{IJ}^e = 2 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}_{IJ}^e} = \mu [I_{IJ} - (J^e)^{-\beta} \mathbf{C}_{IJ}^{e,-1}] \quad (36)$$

对应的四阶弹性本构张量 D_{IJKL}^e 的表达式为

$$D_{IJKL}^e = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{IJ}^e}{\partial \mathbf{C}_{KL}^e} = \beta \mu (J^e)^{-\beta} \mathbf{C}_{IJ}^{e,-1} \mathbf{C}_{KL}^{e,-1} +$$

$$\mu (J^e)^{-\beta} (\mathbf{C}_{IK}^{e,-1} \mathbf{C}_{JL}^{e,-1} + \mathbf{C}_{IL}^{e,-1} \mathbf{C}_{JK}^{e,-1}) \quad (37)$$

将(37)式代入(18)式便可得到本构张量 $\mathbf{D}$ 的分量表达式,并将其转化成如下矩阵形式

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2313} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1323} & D_{1313} \end{bmatrix} \quad (38)$$

可以将(14)式中右边第一项离散成

$$\Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} = (\Delta \mathbf{u}^{\text{node}})^T \cdot [\mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c)]^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c) \cdot \Delta \mathbf{u}^{\text{node}} \quad (39)$$

综上可以得到位移场刚度矩阵 $\mathbf{K}_i^u(\mathbf{x}_c)$ 的表达式

$$\mathbf{K}_i^u(\mathbf{x}_c) = \int_{\Omega_b} \{ [\mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c)]^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_i^u(\mathbf{x}_c) +$$

$$[\mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c)]^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{B}_i^g(\mathbf{x}_c) \} J^g dV_o \quad (40)$$

(40)式右边第一项为材料刚度矩阵,表示材料的非线性;右边第二项为几何刚度矩阵,表示大变形下的几何非线性。将(31)式中的残差力和(40)式中的刚度矩阵进行组装,可以得到总体残差力 $\mathbf{r}$ 和总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$,然后采用牛顿迭代法对位移场进行求解,如下所示

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{r}_n \quad (41)$$

(41)式中下标表示加载步。

3 数值算例

在这一节,为了验证建立的 CS-FEM 数值框架在模拟增长导致变形上的鲁棒性,选用了 3 个自然界和日常生活的增长问题作为数值算例。这 3 个模型的网格和节点信息均借助有限元商业软件 Abaqus 生成。对应的 inp 文件导进 CS-FEM 的 Matlab 程序中,来获取网格和节点信息。为了减少计算量,本节的 2 个算例均采用四分之一模型来进行计算。在输出云图时,根据网格节点坐标和位移场的对称性,对模型进行了补全。

3.1 花瓣增长

花瓣几何形状如图 3 所示,其厚度为 0.3 cm,底部正方形中心区域被固定。为了实现增长诱导变形,将花瓣沿厚度方向分成主动层和被动层,其中主动层靠近模型底端,厚度为 0.1 cm;被动层厚度为 0.2 cm。被动层材料剪切模量为 3 571.43 MPa,泊松比为 0.38。主动层材料剪切模量为 357.143 MPa,泊松比为 0.38。用 Abaqus 将花瓣模型的四分之一划分成 432 个六面体单元,如图 4 所示。对 2 个剖面上的节点施加对称边界条件。

该算例采用 2 种增长张量:各向同性增长张量和各向异性增长张量。前者主对角线元素相等,其他分量都为 0;后者 Y,Z 轴方向的主对角线元素相

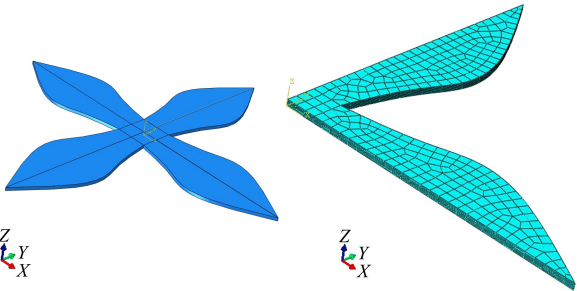


图 3 花瓣的几何形状 图 4 花瓣四分之一模型的网格划分

等并且与 X 轴的增长方向相反,其他分量都为 0。本文设定 Y,Z 轴方向的增长为正向增长量,使其随时间不断增加。并且模拟得到的结果与文献[2]中的数值结果进行了比较。

模拟结果显示,在各向同性增长张量作用下,主动层的单元带动被动层的单元不断向 Z 轴正方向弯曲,最后聚拢在中心处上方,当前构型下沿 Z 轴方向的位移云图如图 5 所示。在各向异性增长张量的作用下,沿 Y 轴方向铺展的花瓣向 Z 轴负方向弯曲,沿 X 轴方向铺展的花瓣向 Z 轴正方向弯曲,并且其 Z 轴方向的位移场呈反对称分布,如图 6 所示。比较图 5 和图 6 可以发现,各向异性的增长变形幅值明显小于各向同性,这一特征与文献[2]中的数值结果吻合。

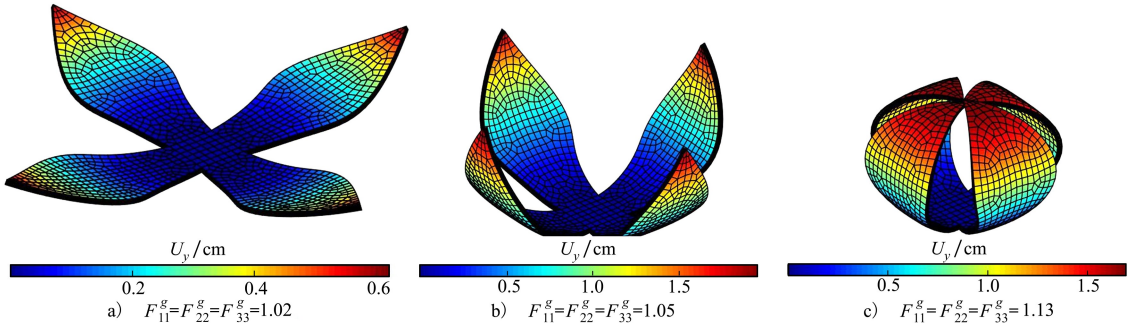


图 5 当前构型下沿 Z 轴方向的位移云图(各向同性)

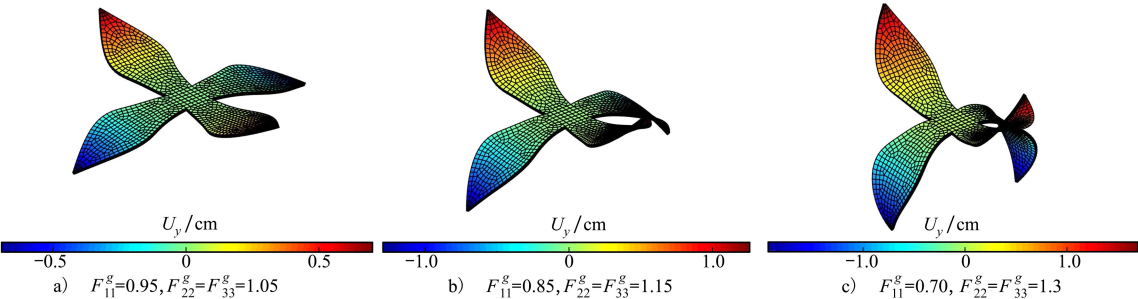


图 6 当前构型下沿 Z 轴方向的位移云图(各向异性)

3.2 茎的生长

本节研究超弹性圆杆增长至不同的构型。圆杆底圆半径为 0.025 cm,圆杆长度为 4 cm。圆杆剪切模量和泊松比分别为 588 MPa 和 0.42。对圆杆 $Z=0$ 的圆面施加固定约束,并设置圆杆所有区域为增长张量的影响区。采用 Abaqus 对圆杆进行网格划分生成 2 632 个六面体单元,如图 7 所示。



图 7 圆杆的网格划分

本节假定圆杆只有 Z 轴方向的主增长分量,按照文献[2,12]的做法,将 Z 轴方向的主增长分量设置成初始坐标的函数。采用建立的软材料增长的 CS-FEM 数值框架,对应不同的增长张量进行模拟,模拟结果如图 8 所示。在图 8 中,直圆杆在不同增长张量的作用下分别变形至圆形、海螺形、等距螺旋形、非等距螺旋形。模拟结果与文献[2]中的数值结果吻合较好,验证了所建立的 CS-FEM 框架模拟软材料增长大变形问题的有效性。

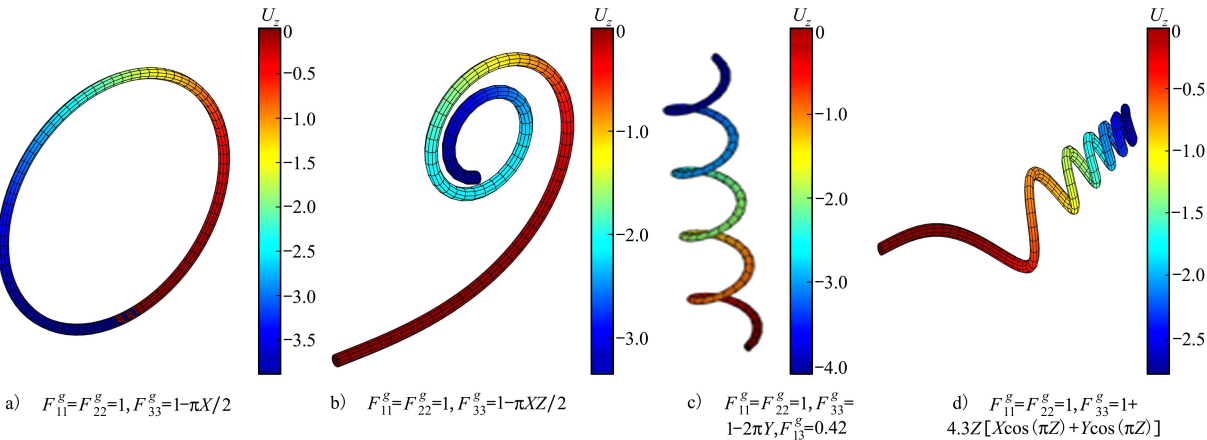


图 8 圆杆在当前构型下 Z 轴方向的位移场云图

3.3 泡芙的制作

本节选用圆台为研究对象,其 CAE 模型如图 9a)所示。该圆台底圆和顶圆半径分别为 3.5 cm 和 2.5 cm,高为 3 cm。选取圆台的四分之一来进行数值模拟,对底面和圆台侧面施加固定约束,对内剖面施加对称位移约束。采用 Abaqus 对圆台四分之一模型进行网格划分,单元模型如图 9b)所示。让图 9b)中的所有单元受各向同性增长张量的影响。材料的剪切模量和泊松比分别为 385 MPa 和 0.45。使增长张量的分量随加载步均匀增加,模拟得到圆台

当前构型的变化如图 10 所示。

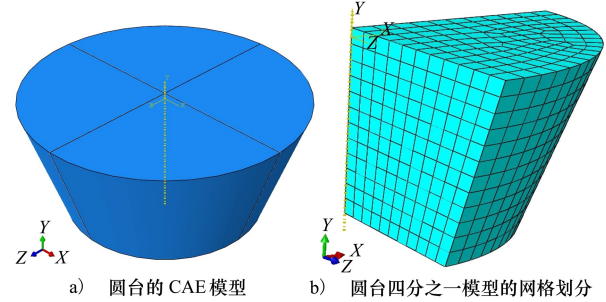


图 9 几何形状和单元划分

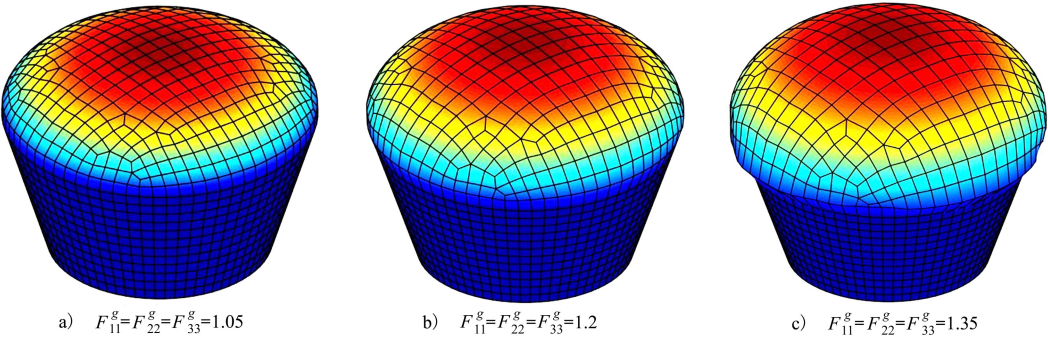


图 10 圆台的各向同性增长

在图 10 中,圆台在增长张量的激励和底部以及侧面的约束作用下,只能沿 Y 轴正方向发生变形,在构型上表现为圆台向上鼓起。随着增长张量的不断增加,鼓起部分的网格将沿 $X-Z$ 平面发生径向均匀膨胀,最终将超过圆台顶部的边界。这一增长现象和泡芙的制作过程较为吻合。

4 结 论

本文基于变形梯度的乘法分解,选用第二 P-K 应力张量和格林应变张量,首次建立了 CS-FEM 模拟可膨胀软材料在大变形下增长行为的数值框架,给出了材料刚度矩阵和几何刚度矩阵的光滑有限元表达形式,模拟了可膨胀软材料在各向同性、各向异

性增长张量作用下的增长行为,模拟结果和已有文献中的数值结果进行了对比。模拟结果中构型的变化规律和特征与已有文献中的结果吻合较好。模拟结果发现:

1) 在相同的增长分量情况下,各向异性增长激励可膨胀软材料的变形相比各向同性增长更小。

2) 对于各向异性增长行为,通过设置增长张量分量关于坐标的函数形式,可以调节软材料的生长形态。

3) 本文建立的 CS-FEM 数值框架可以有效地模拟可膨胀软材料的大变形增长行为,可以帮助揭示自然界中花瓣、植物茎生长现象和生活中泡芙制作过程的力学机理。

参考文献:

- [1] WANG Jianhua, ZHANG Hongwu, ZHENG Yonggang, et al. High-order NURBS elements based isogeometric formulation for swellable soft materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 363, 112901
- [2] KADAPA C, LI Z F, HOSSAIN M, et al. On the advantages of mixed formulation and higher-order elements for computational morphoelasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2021, 148: 104289
- [3] GANGHOFFER J F. A kinematically and thermodynamically consistent volumetric growth model based on the stress-free configuration[J]. International Journal of Solids and Structures, 2013, 50:3446-3459
- [4] ZHENG Yonggang, WANG Jianhua, YE Hongfei, et al. A solid-shell based finite element model for thin-walled soft structures with a growing mass[J]. International Journal of Solids and Structures, 2019, 163: 87-101
- [5] WANG Jianhua, QIU Yisong, ZHANG Hongwu, et al. A solid-shell finite element method for the anisotropic swelling of hydrogels with reinforced fibers[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, 86: 104197
- [6] LIU G, DAI K Y, NGUYEN T T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. Computational Mechanics, 2006, 39(6): 859-877
- [7] ZENG Wei, LIU Guirong, JIANG Chen, et al. An effective fracture analysis method based on the virtual crack closure-integral technique implemented in CS-FEM[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(5): 3783-3800
- [8] LIU G, NGUYEN X H, NGUYEN T T. A theoretical study on the smoothed FEM(S-FEM) models: properties, accuracy and convergence rates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 84(10): 1222-1256
- [9] ZENG W, LIU G R. Smoothed finite element methods (S-FEM): an overview and recent developments[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2018, 25: 397-435
- [10] RODRIGUEZ A K, HOGER A, MCCULLOCH A. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissue[J]. Journal of Biomechanics, 1994, 27: 455-467
- [11] KUHL E. Growing matter; a review of growth in living systems[J]. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2014, 29: 529-543
- [12] MOULTON D E, LESSINNES T, GORIELY A. Morphoelastic rods. Part I: a single growing elastic rod[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2013, 61: 398-427

Three-dimensional growth simulation of swellable soft materials based on CS-FEM

PENG Fan¹, HUANG Wei², MA Yu'e², GUO Wen²
(1.School of Science, Chang'an University, Xi'an 710061, China;
2.School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In this paper, a three-dimensional numerical framework for modeling growth of swellable soft materials at large deformation is established based on the cell-based smooth finite element method, and the multiplicative decomposition scheme of deformation gradient is given. The second P-K stress and Green's strain tensor are selected as work conjugate pairs, and the corresponding mathematical expressions of stiffness matrix and geometric stiffness matrix are derived. The numerical method is implemented based on Matlab platform, and the isotropic and anisotropic growth behaviors of swellable soft materials are simulated respectively. The results show that anisotropic growth will inhibit the deformation of expandable soft materials compared with isotropic growth. The simulation results are compared with the calculation results in the existing literature. The comparison results show that the characteristics and the morphological mode are in good agreement, which proves the effectiveness of the numerical framework in simulating the growth behavior of expandable soft materials at large deformation, and is able to reveal the mechanical mechanism of the plant growth phenomenon in nature.

Keywords: large deformation;smoothed finite element;soft material;growth mechanics

引用格式:彭帆, 黄玮, 马玉娥, 等. 基于 CS-FEM 的可膨胀软材料三维增长模拟[J]. 西北工业大学学报, 2023, 41(1): 136-143
PENG Fan, HUANG Wei, MA Yu'e, et al. Three-dimensional growth simulation of swellable soft materials based on CS-FEM[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2023, 41(1): 136-143 (in Chinese)