

基于特征值聚类的 MUSIC 算法

张明洋, 查淞元, 刘雨东

(上海船舶电子设备研究所, 上海 201108)

摘 要:传统 MUSIC 算法需要预先知道目标信号源的个数,进一步确定信号子空间和噪声子空间的维数,最后进行谱峰搜索。在实际工程中,无法预知待测目标的个数,针对这一问题,提出了一种基于密度聚类算法的改进型 MUSIC 算法。该算法将协方差矩阵的特征值进行聚类,通过 DBSCAN 聚类算法可求出目标信号源的个数,再进一步估计出目标的方位。仿真结果表明:提出的改进算法在信号源个数未知的情况下能够准确估计出信号源的个数和方位,较传统的 MUSIC 算法有更大实用性。

关 键 词:波达方向估计;DBSCAN 算法;MUSIC 算法

中图分类号:TN911.7

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2023)03-0574-05

多重信号分类法(MUSIC)因其多信号同时测向、适用短数据情况、高精度测向等优点而被广泛应用在方位估计中。但在实际工程中却受到掣肘,主要是由于以下原因:对于相干信号的估计结果基本失去准确性;需进行特征值分解和谱峰搜索,计算量较大,无法满足实时性;需预先知道目标信号源的个数,无法满足实际情况。针对以上问题,相关学者开展了大量的研究,提出了各类改进方法。

针对计算复杂度较高这一问题,Root-MUSIC 通过将谱峰搜索问题转化为多项式求根问题,大大降低了复杂度,但当阵列规模不断增大时,求根多项式阶数提高,运算速度大幅降低^[1-2]。Ren 等^[3]对 Root-MUSIC 进行了改进,通过重构新的数据向量将多项式的阶数降至信号源个数,从而降低了算法的计算量,但这种算法降低了对目标的估计精度。余黎煌等^[4]针对低复杂度 Root-MUSIC 快速算法的精度较低问题,提出了一种具有精度补偿的低复杂度 Root-MUSIC 算法。针对相干信号估计不准确这一问题,周小军等^[5]提出了 IMMUSIC(improved MUSIC)算法,通过重构协方差矩阵使其具有 Toeplitz 特征,进而得到相干信源的 DOA 估计。Kamiya 等^[6]使用了 2 个循环相关矩阵和相应的循环后向矩阵(2MCC-CB),得到了较高的估计精度,大

大提高了 DOA 估计的性能。针对实际信源个数未知这一问题,黄景德等^[7]将 ICA 和 MUSIC 算法相结合,提出了一种改进算法,在算法迭代的过程中不仅得到了信源的方位信息,还得到了未知信源的个数。陀秋艳等^[8]应用全空间加权修正算法和投影分解修正算法,实现了信源数目未知时 MUSIC 算法的方位准确估计。

经典 MUSIC 算法在未知信源个数的条件下可通过接收信号协方差矩阵特征值的分解来进行估计,将特征值远大于其他特征值的个数作为目标信源的个数,但是这种解决方法并不适用于低信噪比、快拍数小的情况,一旦信号源个数与估计结果不一致,将会使得 MUSIC 算法估计结果不可靠甚至完全失效。针对这一问题,本文通过聚类算法实现了较低信噪比下的目标源个数的估计,进而提高 MUSIC 算法的实用性。

1 传统 MUSIC 算法

假设有 M 个阵元构成均匀直线阵,相邻阵元间距 d ,每个阵元接收到 D 个独立信号源的发射信号,则可以建立阵列信号的数学模型:

收稿日期:2022-07-26

作者简介:张明洋(1998—),上海船舶电子设备研究所硕士研究生,主要从事水声信号处理研究。

通信作者:刘雨东(1972—),上海船舶电子设备研究所研究员,主要从事水声信号处理研究。e-mail:315267594@qq.com

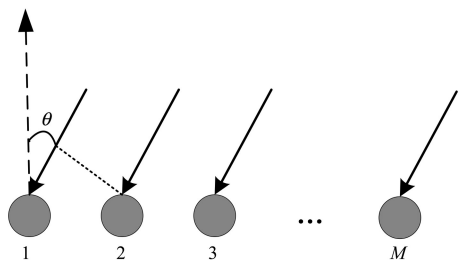


图1 等距线列阵接收目标信号示意图

第 k 个信号 ($k = 1, 2, \dots, D$) 到达第 m 个阵元的数学表达式为

$$x_{mk}(t) = A_k(t - \tau_{mk}) e^{j\omega(t - \tau_{mk})} + n(t) \quad (1)$$

式中: $x_{mk}(t)$ 下标表示第 m 个阵元接收第 k 个目标信号; A_k 表示接收到的目标信号复包络; ω 表示目标信号角频率, $\omega = 2\pi f$; $n(t)$ 表示阵元接收到的噪声, 假设为高斯白噪声, 且与信号不相关。 τ_m 是由于波程差产生的时间延迟, $\tau_{mk} = (m - 1) d \sin(\theta_k) / c$ 。

对于窄带信号, 有如下近似关系

$$A_k(t - \tau_{mk}) \approx A_k(t) \quad (2)$$

可以将 (1) 式写为: $x_{mk}(t) = A_k(t) e^{j\omega(t - \tau_{mk})} + n(t)$ 。最终, 可以得到第 m 个阵元接收到 k 个所有目标信号源的数学表达式

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^D A_k(t) e^{j\omega(t - \tau_{mk})} + n_m(t) = \sum_{k=1}^D A_k(t) e^{j2\pi \frac{c}{\lambda} (t - \frac{(m-1)d \sin \theta_k}{c})} + n_m(t) \quad (3)$$

令 $s_k(t) = A_k(t) e^{j2\pi \frac{c}{\lambda} t}$, 对 (3) 式进行化简为

$$x_m = \sum_{k=1}^D s_k(t) e^{-j2\pi \frac{(m-1)d \sin \theta_k}{\lambda}} + n_m(t) \quad (4)$$

用矩阵的形式表示 M 个阵元接收到的快拍数据:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_D(t) \end{bmatrix} + \mathbf{N}(t) \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j2\pi \frac{d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j2\pi \frac{d \sin \theta_2}{\lambda}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{d \sin \theta_D}{\lambda}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{(M-1)d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j2\pi \frac{(M-1)d \sin \theta_2}{\lambda}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(M-1)d \sin \theta_D}{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

矢量矩阵表示

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{X} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$$

$$\mathbf{S} = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_M(t)]^T$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_D)]$$

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi \frac{d \sin(\theta_k)}{\lambda}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(M-1)d \sin(\theta_k)}{\lambda}} \end{bmatrix}^T$$

MUSIC 算法的基本思想: 将接收到的信号数据求协方差矩阵, 该协方差矩阵可以分解为噪声子空间和信号子空间, 最后构造空间谱函数, 通过谱峰搜索对目标方位进行估计。

假设目标信号与高斯白噪声完全不相关, 且该噪声的方差为 σ^2 , 所以

$$\mathbf{R}_{XX} = E(\mathbf{X}\mathbf{X}^H) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (8)$$

$\mathbf{R}_{XX}$ 有 $M - D$ 个值为 σ^2 的最小特征值, 对应为噪声, 称为噪声特征值; 有 D 个大于 σ^2 的特征值, 对应于信号, 称为信号特征值

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{D+1} = \lambda_{D+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (9)$$

设 λ_1 为 $\mathbf{R}_{XX}$ 的噪声特征值, $\mathbf{v}_i$ 为特征值 λ_i 对应的特征向量则有

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{R}_{XX} \mathbf{v}_i = (\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}) \mathbf{v}_i \quad (10)$$

根据前面分析, $\lambda_1 = \sigma^2$, 得到结果如下

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H \mathbf{v}_i = 0 \quad (11)$$

$\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 是一个 $D \times D$ 的满秩矩阵, $\mathbf{R}_{SS}$ 同样也为 $D \times D$ 的满秩矩阵, 所以它们的逆都存在, 对 (11) 式左乘 $\mathbf{R}_{SS}^{-1}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$

$$\mathbf{R}_{SS}^{-1}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H \mathbf{v}_i = 0 \quad (12)$$

化简后可得:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{v}_i = 0 \quad (13)$$

至此已经证明, 噪声子空间和矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量 (即导向矢量) 相正交, 而导向矢量中包含目标信号的方位信息。

假设将分解得到的噪声特征值对应的特征向量构造为一个噪声矩阵

$$\mathbf{G}_n = [\mathbf{v}_{D+1}, \mathbf{v}_{D+2}, \dots, \mathbf{v}_M] \quad (14)$$

定义空间谱 $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{G}_n \mathbf{G}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (15)$$

(15) 式中分母为导向矢量和噪声矩阵的内积, 当 $\mathbf{a}(\theta)$ 与 $\mathbf{G}_n$ 的各列正交时, 该分母为零, 但由于噪声存在, 它实际是最小值, $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 为一尖峰值, 通过谱峰搜索可得到波达角。

2 未知信源个数下的改进 MUSIC 算法

2.1 全空间加权修正 MUSIC 算法

文献[8]的全空间加权修正 MUSIC 算法使用了协方差矩阵全部的特征向量,但在构造噪声矩阵时,通过对不同特征向量施加权不同的权重,以使不同特征向量对谱估计结果产生不同的作用。构造新的噪声矩阵

$$\mathbf{G} = \left[\frac{1}{\lambda_1^\alpha} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\lambda_2^\alpha} \mathbf{v}_2, \cdots, \frac{1}{\lambda_M^\alpha} \mathbf{v}_M \right] \quad (16)$$

式中: λ_i 为协方差矩阵的特征值; α 为调节指数用来调节加权的效果。因为信号特征值一般大于其他特征值,所以调节 α 能够减弱信号特征向量对谱估计结果的影响。

算法流程:

- 1) 对接收数据的协方差矩阵进行特征值分解,得到 M 个特征值和特征向量。
- 2) 构造新的噪声矩阵 $\mathbf{G}$ 。
- 3) 得到 MUSIC 谱估计结果

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta)}$$

2.2 基于密度聚类的改进 MUSIC 算法

密度聚类是一种无监督学习算法,通过数据之间分布的紧密程度来对样本进行分类。DBSCAN (density-based spatial clustering of applications with noise) 算法是一种经典的密度聚类算法,通过一组邻域来描述数据分布的紧密程度。给定数据集 $\mathbf{D} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$, 下面给出算法相关的定义^[9]:

ε -邻域: 对 $\mathbf{x}_j \in \mathbf{D}$, 其 ε -邻域包含数据集 $\mathbf{D}$ 中与 $\mathbf{x}_j$ 的距离不大于 ε 的数据。

核心对象: 若 $\mathbf{x}_j$ 的 ε -邻域至少包含 P_{minPts} 个样本, 即 $|N_\varepsilon(\mathbf{x}_j)| \geq P_{\text{minPts}}$, 则 $\mathbf{x}_j$ 是核心对象。

密度直达: 若 $\mathbf{x}_j$ 位于 $\mathbf{x}_i$ 的 ε -邻域中, 且 $\mathbf{x}_i$ 为核心对象, 则称 $\mathbf{x}_j$ 由 $\mathbf{x}_i$ 密度直达。

密度可达: 对 $\mathbf{x}_i$ 与 $\mathbf{x}_j$, 若存在样本序列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$, 其中 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}_i, \mathbf{p}_n = \mathbf{x}_j$, 且 $\mathbf{p}_{i+1}$ 由 $\mathbf{p}_i$ 密度直达, 则称 $\mathbf{x}_j$ 由 $\mathbf{x}_i$ 密度可达。

DBSCAN 算法如下:

输入: 数据集, 邻域半径 R_{Eps} , 邻域中数据对象数目阈值 P_{minPts} ;

- 1) 从数据集中任意选取一个数据点 $\mathbf{p}$;
- 2) 如果对于参数 R_{Eps} 和 P_{minPts} , 所选取的数据点 $\mathbf{p}$ 为核心对象, 则找出所有从 $\mathbf{p}$ 密度可达的数据点, 形成一个簇;
- 3) 如果选取的数据点 $\mathbf{p}$ 是边缘点, 选取另一个数据点;
- 4) 重复步骤 2)~3), 直到所有点被处理

MUSIC 算法中对目标源个数进行估计可以转化为对协方差矩阵特征值的分类, 可将特征值分为噪声特征值和信号特征值。其中信号特征值明显大于噪声特征值, 因此使用 DBSCAN 聚类算法可将信号特征值标记为噪音点, 通过计算噪音点的个数来计算目标源的个数。

基于 DBSCAN 特征值聚类的 MUSIC 算法流程如下:

- 1) 令接收数据仅为噪声数据, 对协方差矩阵进行特征值分解。
- 2) 对 M 个噪声特征值进行分析, 给出 DBSCAN 算法的 R_{Eps} 和 P_{minPts} 参数取值。
- 3) 对含有回波信号数据的协方差矩阵进行特征值分解, 得到 M 个特征值和特征向量。
- 4) 对 M 个特征值进行 DBSCAN 算法聚类, 得到信源个数 j 。
- 5) 构造新的噪声矩阵 $\mathbf{G} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{M-j}]$ 。
- 6) 得到 MUSIC 谱估计结果:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta)}$$

3 仿真分析

仿真参数选取时, 选用阵元数为 30 的均匀直线阵, 目标源数为 3, 目标源是中心频率为 10 kHz 的窄带信号, 噪声取均值为 0、平均功率 1 的高斯白噪声, 快拍数为 1 000。全空间加权修正算法中的调节指数 α 设为 4, 邻域半径为 180, 对象数目阈值为 5。分析以上方法的性能。

实验一: 对 3 种方法的高分辨性能进行考察。假设存在 3 个目标源, 其入射角度分别为 $48^\circ, 50^\circ, 52^\circ$; 信噪比均设为 15 dB。

从图 2 可以看出 Capon 算法即使在信噪比为 15 dB 的强目标回波信号下也很难分辨出目标源的个数及其准确方位, 算法的分辨率较低, 估计效果差。而全空间加权 MUSIC 算法和基于特征值聚类

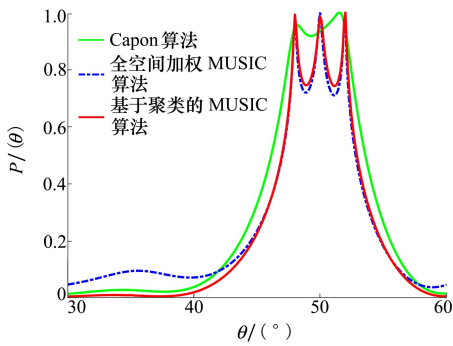


图 2 3 种方法的分辨性能对比图

的 MUSIC 算法则能够明显分辨出 4° 以内的多个目标,达到超分辨的效果。因此改进后的算法即使多个目标处在同一个波束内,依然能够准确估计出多个目标的具体方位。

实验二:对 DBSCAN 算法低信噪比下的聚类效果进行考察。假设存在 3 个目标源,其入射角度分别为 70°,50°,90°;信噪比设为 0,-10,-15 dB。

为对聚类结果进行可视化,对特征值进行了处理,处理后的特征值为 $10 * \lg(\text{真实特征值})$ 。图 3 中最大的特征值对应信噪比为 0 dB 的强目标回波

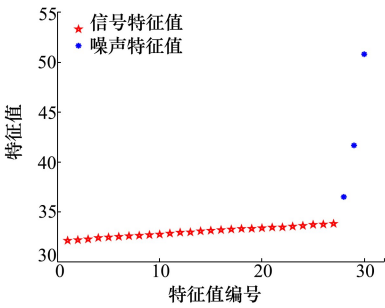


图 3 DBSCAN 算法聚类结果示意图

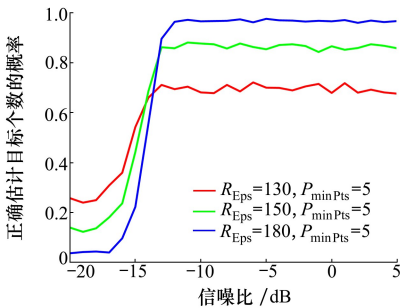


图 4 不同邻域半径 R_{Eps} 对聚类结果的影响

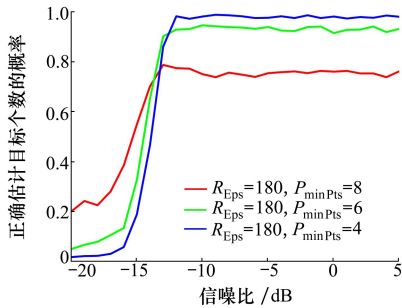


图 5 不同对象数目阈值 P_{minPts} 对聚类结果的影响

4 结 论

在目标信号源未知的情况下,本文提出了一种基于特征值聚类的改进型 MUSIC 算法,给出了算法的流程,然后通过仿真验证了其超分辨性能,强目标下对弱目标特征值的聚类效果,最后给出不同参数

信号,蓝色标记最小的特征值对应信噪比为 -20 dB 的弱目标回波信号。从图中可以看出,基于特征值聚类的 MUSIC 算法在强目标的掩盖下依然能够有效区分出弱目标的特征值,这说明在使用 DBSCAN 算法对特征值进行聚类时,其聚类结果不受异常值的影响,因此该算法对于不同目标强度的信源依然能够取得较好的估计结果。

实验三:在不同参数下,对 DBSCAN 算法的聚类效果进行分析。假设存在 2 个目标,其目标强度相同,使用该算法对目标个数进行 1 000 次估计,计算其正确估计的概率。

图 4 和图 5 分别给出了 2 种参数对聚类结果的影响。在选取邻域半径时,若半径范围选取较小,在低信噪比时,能够取得较好的聚类效果,但对噪声特征值很敏感,容易将噪声特征值标记为信号特征值;若邻域半径选取较大,在低信噪比时,容易将信号特征值标记为噪声特征值。在选取对象数目阈值时,较大的对象数目阈值在低信噪比下能够取得较好的聚类效果,较小的阈值则在高信噪比下更适合。在实际应用中,应当根据实际的背景噪声来确定参数的选取。

对聚类效果的影响。应当指出的是,在对目标源个数进行判定时,漏判目标会导致将信号子空间当成噪声子空间,此时对目标方位的估计将会产生错误;若多判目标将会减少噪声子空间的个数,对目标方位估计的结果影响有限。因此在对 DBSCAN 算法选取参数时尽量将邻域半径选取在较小的水平。

参考文献:

[1] YAN F G, JIN M, ZHOU H J, et al. Low-degree Root-MUSIC algorithm for fast DOA estimation based on variable substitution

- technique[J]. Science China: Information Science, 2020, 63 (5): 218-22