

自适应 II 型逐步截尾双应力恒加试验统计分析

杨天乐, 李华聪, 符江锋

(西北工业大学 动力与能源学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对传统加速寿命试验仅考虑单一加速应力和单一失效模式的问题, 研究寿命服从 Weibull 分布且失效模式相互独立的竞争失效产品, 在自适应 II 型逐步截尾下建立双应力恒加试验的统计分析方法。通过 Newton-Raphson 迭代和渐进似然理论得到未知参数的极大似然估计和渐进置信区间。采用 Gibbs 抽样与 M-H 抽样混合算法获得参数的 Bayes 估计并基于 MC 方法构建 HPD 可信区间。数值模拟结果表明所提的方法具有良好的统计推断性能且失效样本数和试验时间对估计效果有显著影响。

关 键 词: 加速寿命试验; 竞争失效; Weibull 分布; 极大似然估计; Bayes 估计

中图分类号: V240.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2024)03-0487-11

加速寿命试验 (accelerated life testing, ALT) 通过增大试验件所受到的应力, 如温度、电压、压力等, 以便在更短的时间内获得相应的故障数据, 是获得高可靠性、长寿命产品失效数据的一种有效途径。茆诗松^[1]与 Voiculescu 等^[2]学者已经对加速寿命试验的数学模型进行了大量研究。在现有研究中, 通常仅考虑单一应力的影响, 但在工程实际中, 受试产品的寿命会受到多种环境应力综合效果影响。另外, 加速寿命试验要求产品的失效机理在试验过程中不发生改变^[3], 当某一应力水平超过产品承受上限时, 产品失效机理就会发生变化, 所以单一应力水平不宜增加过高, 这样试验时间的缩短就会受到限制。因此, 为了增加试验效率, 提高试验结果的准确性, 有必要针对多应力加速寿命试验及其统计分析进行研究。张春华等^[4-5]提出一种步降应力加速寿命试验方法, 该方法在损耗型长寿命产品试验中可显著提高试验效率。孙天宇等^[6]在双应力交叉步加试验下研究了寿命服从威布尔分布部件可靠性指标的估计, 给出参数的 Bayes 估计。寇海霞等^[7]提出一种双应力同步步降加速寿命试验方法来提高试验效率, 并针对威布尔分布产品进行仿真分析。Chen

等^[8]以气缸为对象开展双应力交叉步降加速寿命试验, 获得了气缸的可靠性指标并验证了加速模型的正确性。

以上研究均假设产品只有一种失效模式, 然而在工程实际中, 产品的失效往往是由多种失效模式导致, 因此有必要引入竞争失效模型, 在该模型中, 所观测到的失效数据由失效时间和失效机理标志两部分组成。竞争失效模型在医学、工程、计量经济学等很多领域得到了广泛应用, 目前, 国内外针对竞争失效模型在加速寿命试验中的应用已有很多研究。Han 等^[9]研究了指数分布下步进应力竞争失效模型, 给出参数的极大似然估计 (maximum likelihood estimation, MLE) 并构建了置信区间。张春芳等^[10]研究了指数-威布尔分布的竞争失效模型, 分别应用极大似然估计方法和 Bayes 方法得到参数的点估计和区间估计。Alam 等^[11]在 I 型和 II 型截尾下讨论了 Fréchet 分布竞争失效部分加速寿命试验的统计分析问题。文献[12-14]分别分析了寿命服从威布尔分布、Lindley 分布以及 Kumaraswamy 分布时的竞争失效模型。

在引入双应力竞争失效模型的同时, 为了进一步节省试验时间和成本, 还需要考虑截尾方案。最常用的截尾方案是 I 型截尾 (定时截尾) 和 II 型截尾 (定数截尾), Epstein^[15]首先提出综合 I 型和 II 型截尾的混合截尾方案。然而, 这几种截尾方案只在试

收稿日期: 2023-05-31

基金项目: 国家科技重大专项 (J2019-V-0016-0111) 资助

作者简介: 杨天乐 (1998—), 硕士研究生

通信作者: 李华聪 (1962—), 教授 e-mail: lihuacong@nwpu.edu.cn

验截止时移走未失效的试验件,使得试验缺少灵活性。在之后被提出的逐步截尾方案中,每次失效发生时,均会随机移走一定数量的未失效试验件。Kundu 等^[16]结合逐步 II 型截尾和混合截尾方案,提出一种逐步 II 型混合截尾方案,避免了逐步截尾试验时间过长的问题。然而在这种方案中,可能会出现失效样本数量过小的问题,从而对数据的统计分析产生影响。于是,Ng 等^[17]提出了自适应 II 型逐步截尾 (adaptive type-II progressive censoring, AT-II PCS),既能控制试验时间又能确保在试验中获得失效样本数量。近年来,AT-II PCS 的应用得到了广泛研究,文献[18-20]分别讨论了广义 Pareto 分布、广义指数分布和 Weibull 分布的参数估计问题。Ren 等^[21]将 AT-II PCS 和竞争失效模型相结合,并通过数值模拟与试验数据验证了所提模型的正确性。

AT-II PCS 能够有效节省试验时间和成本,但由于模型和计算的复杂性,针对其在加速寿命试验中的应用研究仍然较少。因此,本文在 AT-II PCS 下考虑寿命服从 Weibull 分布的独立竞争失效产品,建立起双应力恒加试验的统计分析方法。建立似然函数方程,并采用 Newton-Raphson 迭代和渐进似然理论得到未知参数的 MLE 和渐进置信区间。采用 Gibbs 与 M-H 相结合的算法得到参数的 Bayes 估计,并采用 Monte Carlo (MC) 方法构建参数的最大后验密度可信区间。最后,通过数值模拟方法验证模型的正确性,并比较在不同的试验方案下 MLE 与 Bayes 方法的参数估计效果。

1 模型描述

1.1 自适应 II 逐步型截尾下双应力恒加试验

假设有 2 组应力水平 S^1, S^2 满足

$$\begin{aligned} S_0^1 < S_1^1 < \cdots < S_k^1 \\ S_0^2 < S_1^2 < \cdots < S_l^2 \end{aligned} \quad (1)$$

式中: k 和 l 分别表示 2 组加速应力的水平数; S_0^1, S_0^2 分别为 2 组应力的正常应力水平。第一组应力中的第 i 个加速应力水平和第二组应力中的第 j 个加速应力水平的组合 (S_i^1, S_j^2) 称为水平组合,简记为 (i, j) , $i = 1, 2, \cdots, k, j = 1, 2, \cdots, l$ 。水平组合共可以有 kl 个,将 n 个参试样品分为 kl 组,记每组样品数量为 n_{ij} ,若只选择其中的部分水平组合进行恒加试验,则

样本量相应减少,为了叙述方便,假设有 kl 个水平组合。给定每组的预期失效数 m_{ij} ,预期试验时间 τ_{ij} 和逐步移走方案 $(R_{ij,1}, R_{ij,2}, \cdots, R_{ij,m_{ij}})$ 。试验过程中,在第 1 个样品失效时刻 $t_{ij,1}$,从剩余 $n_{ij} - 1$ 个未失效样品中随机移走 $R_{ij,1}$ 个样品,在第 2 个样品失效时刻 $t_{ij,2}$,从剩余 $n_{ij} - R_{ij,1} - 2$ 个未失效样品中随机移走 $R_{ij,2}$ 个样品,以此类推,直到第 m_{ij} 个失效时刻 $t_{ij,m_{ij}}$,移走剩下所有的未失效产品,即 $R_{ij,m_{ij}} = n_{ij} - \sum_{s=1}^{m_{ij}-1} R_{ij,s}$ 。试验会出现以下 2 种情形:

Case I 若 $t_{ij,m_{ij}} < \tau_{ij}$,试验结束,移走方案不变,这种情况等同于普通的逐步 II 型截尾方案。

Case II 若 $t_{ij,J} < \tau_{ij} < t_{ij,J+1}$, $J = 0, 1, 2, \cdots, m_{ij} - 1$ 且 $t_{ij,0} = 0$,令 $R_{J+1} = R_{J+2} = \cdots = R_{m_{ij}-1} = 0, R_{m_{ij}} = n_{ij} - m_{ij} - \sum_{s=1}^J R_{ij,s}$,试验继续,也就是将移走方案 $(R_{ij,1}, R_{ij,2}, \cdots, R_{ij,m_{ij}})$ 变为 $(R_{ij,1}, R_{ij,2}, \cdots, R_{ij,J}, 0, \cdots, 0, R_{ij,m_{ij}}^* = n_{ij} - m_{ij} - \sum_{s=1}^J R_{ij,s})$ 。

自适应 II 型逐步截尾方案能保证每组最终的失效样本数为 m_{ij} ,并且当试验时间超过 τ_{ij} 后,试验将尽可能快结束。

1.2 基本假设

1) 共 n 个参试样品分为 kl 组,在水平组合 (i, j)

下有 n_{ij} 个样品进行试验且 $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij} = n$ 。

2) 每个样品的失效由 m 种独立失效机理的其中一种造成,记水平组合 (i, j) 下 m 种失效机理的发生时间分别为 $T_{ij,1}, T_{ij,2}, \cdots, T_{ij,m}$,则样品的失效时间为 $\min\{T_{ij,1}, T_{ij,2}, \cdots, T_{ij,m}\}$ 。

3) 水平组合 (i, j) 下, $T_{ij,1}, T_{ij,2}, \cdots, T_{ij,m}$ 均服从两参数 Weibull 分布 $W(\eta_{ij,u}, \beta_u)$,其中 β_u 为形状参数, $\eta_{ij,u}$ 为尺度参数,分布函数 (cumulative distribution function, CDF) 和密度函数 (probability density function, PDF) 分别如 (2) ~ (3) 式所示。

$$F_{ij,u}(t | \eta_{ij,u}, \beta_u) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_{ij,u}}\right)^{\beta_u}\right\}, \quad t \geq 0, \eta_{ij,u}, \beta_u > 0 \quad (2)$$

$$f_{ij,u}(t | \eta_{ij,u}, \beta_u) = \frac{\beta_u t^{\beta_u-1}}{\eta_{ij,u}^{\beta_u}} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_{ij,u}}\right)^{\beta_u}\right\}, \quad t \geq 0, \eta_{ij,u}, \beta_u > 0 \quad (3)$$

4) 在各水平组合下产品失效机理一致,即 $\beta_{11u} = \beta_{12u} = \beta_{21u} = \cdots = \beta_u (u = 1, 2, \cdots, m)$ 。

5) 第 u 个失效机理的加速模型为

$$\ln \eta_{ij,u} = c_{0u} + c_{1u} \varphi_1(S_i^1) + c_{2u} \varphi_2(S_j^2) \quad (4)$$

式中: $c_{0u}, c_{1u}, c_{2u}, u = 1, 2, \dots, m$ 为待估参数; φ_1, φ_2 为已知函数。

1.3 竞争失效模型

基于 1.2 节中的假设,在水平组合 (i, j) 下进行 AT-II PCS 双应力恒加试验,观测到的失效数据包含失效时间和失效机理标志,即 $(t_{ij,1}, \alpha_{ij,1}), (t_{ij,2}, \alpha_{ij,2}), \dots, (t_{ij,m_{ij}}, \alpha_{ij,m_{ij}})$, 其中 $t_{ij,1}, t_{ij,2}, \dots, t_{ij,m_{ij}}$ 为次序统计量, $\alpha_{ij,s} \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。令

$$\delta_u(\alpha_{ij,s}) = \begin{cases} 0, & \alpha_{ij,s} \neq u \\ 1, & \alpha_{ij,s} = u \end{cases}$$

则水平组合 (i, j) 下由第 u 个失效机理造成的失效数为 $N_{ij,u} = \sum_{s=1}^{m_{ij}} \delta(\alpha_{ij,s})$ 。本文所提出的方法很容易推广到 $m > 2$ 的情形,为方便表述,考虑失效机理个数 $m = 2$ 。在 2 种独立失效模式下所观测到的失效时间 t_{ij} 的 CDF 和 PDF 分别为

$$L_{ij,u} \propto \left[\prod_{s=1}^{m_{ij}} (f_{ij,u}(t_{ij,s}))^{\delta_u(\alpha_{ij,s})} (1 - F_{ij,u}(t_{ij,s}))^{1-\delta_u(\alpha_{ij,s})} \right] \left[\prod_{s=1}^D [1 - F_{ij,u}(t_{ij,s})]^{R_{ij,s}} \cdot [1 - F_{ij,u}(t_{ij,m_{ij}})]^B \right] \quad (8)$$

式中

$$D = \begin{cases} m_{ij}, & \text{Case I} \\ J, & \text{Case II} \end{cases}, B = \begin{cases} 0, & \text{Case I} \\ n_{ij} - m_{ij} - \sum_{s=1}^J R_{ij,s}, & \text{Case II} \end{cases}$$

$$L_{ij,u} \propto \frac{\beta_u^{N_{ij,u}}}{\eta_{ij,u}^{\beta_u \cdot N_{ij,u}}} \left(\prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) \exp \left[- \frac{\sum_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\beta_u} + \sum_{s=1}^D R_{ij,s} t_{ij,s}^{\beta_u} + B t_{ij,m_{ij}}^{\beta_u}}{\eta_{ij,u}^{\beta_u}} \right] \quad (9)$$

第 u 个失效机理的完整似然函数和全部失效数

据的完整似然函数分别为

$$L_u = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l L_{ij,u} \propto \frac{\beta_u \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u}}{\left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \eta_{ij,u}^{\beta_u} \right)^{\beta_u}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right)^{\beta_u - 1} \exp \left[- \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{T_{ij}(\beta_u)}{\eta_{ij,u}^{\beta_u}} \right] \quad (10)$$

$$L = \prod_{u=1}^m L_u \quad (11)$$

式中

$$T_{ij}(\beta_u) = \sum_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\beta_u} + \sum_{s=1}^D R_{ij,s} t_{ij,s}^{\beta_u} + B t_{ij,m_{ij}}^{\beta_u}$$

$$\ln L_u \propto \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u} \ln \beta_u - \beta_u \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u} \ln \eta_{ij,u} + (\beta_u - 1) \ln \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{T_{ij}(\beta_u)}{\eta_{ij,u}^{\beta_u}} \quad (12)$$

(12) 式分别对参数 $\beta_u, \eta_{ij,u}$ 求偏导并令偏导数为 0,

可得以下方程组

$$F_{ij}(t_{ij}) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta_{ij,1}} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{t}{\eta_{ij,2}} \right)^{\beta_2} \right\} \quad (5)$$

$$f_{ij}(t_{ij}) = \left(\frac{\beta_1 t_{ij}^{\beta_1-1}}{\eta_{ij,1}^{\beta_1}} + \frac{\beta_2 t_{ij}^{\beta_2-1}}{\eta_{ij,2}^{\beta_2}} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta_{ij,1}} \right)^{\beta_1} - \left(\frac{t}{\eta_{ij,2}} \right)^{\beta_2} \right\} \quad (6)$$

产品的失效由失效模式 1 造成的概率为

$$q_{ij} = P(t_{ij,1} \leq t_{ij,2}) =$$

$$\frac{\beta_2}{\eta_{ij,2}^{\beta_2}} \int_0^\infty y^{\beta_2-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta_{ij,2}}\right)^{\beta_2}} (1 - e^{-\left(\frac{y}{\eta_{ij,1}}\right)^{\beta_1}}) dy \quad (7)$$

由(7)式可得 $N_{ij,1} \sim B(m_{ij}, q_{ij}), N_{ij,2} \sim B(m_{ij}, 1-q_{ij})$ 。

2 极大似然估计

2.1 似然函数和点估计

假设每个水平组合下至少有一个失效由第 u 个失效机理造成,其似然函数为

将(2)~(3)式代入(8)式得

参数 $\theta_u = (\beta_u, \eta_{11,u}, \eta_{12,u}, \dots, \eta_{kl,u})$ 的 MLE 记为 $\hat{\theta}_u = (\hat{\beta}_u, \hat{\eta}_{11,u}, \hat{\eta}_{12,u}, \dots, \hat{\eta}_{kl,u})$, 可直接通过(10)式求得。将(10)式取对数得

$$\frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u}}{\beta_u} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u} \ln \eta_{ij,u} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\sum_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\beta_u} \ln \left(\frac{t_{ij,s}}{\eta_{ij,u}} \right) + \sum_{s=1}^D R_{ij,s} t_{ij,s}^{\beta_u} \ln \left(\frac{t_{ij,s}}{\eta_{ij,u}} \right) + B t_{ij,m_{ij}}^{\beta_u} \ln \left(\frac{t_{ij,m_{ij}}}{\eta_{ij,u}} \right)}{\eta_{ij,u}} + \ln \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \ln L_u}{\partial \eta_{ij,u}} = -\frac{N_{ij,u} \beta_u}{\eta_{ij,u}} + \frac{\beta_u T_{ij}(\beta_u)}{\eta_{ij,u}^{\beta_u+1}} = 0 \quad (i=1, \dots, k; j=1, \dots, l) \quad (14)$$

采用 Newton-Raphson 迭代法求解 (13) 和 (14) 式即可得到参数的 MLE。

定理 1 $\hat{\beta}_u$ 存在且唯一。

证明 由 (13) 式可得

$$\lim_{\beta_u \rightarrow 0} \frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u} = +\infty$$

对任意 i, j , 均满足 $t_{ij,m_{ij}} \leq \eta_{ij,u}$ 时

$$\frac{\partial^2 \ln L_u}{\partial \beta_u^2} = -\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u}}{\beta_u^2} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\sum_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\beta_u} \left(\ln \left(\frac{t_{ij,s}}{\eta_{ij,u}} \right) \right)^2 + \sum_{s=1}^D R_{ij,s} t_{ij,s}^{\beta_u} \left(\ln \left(\frac{t_{ij,s}}{\eta_{ij,u}} \right) \right)^2 + B t_{ij,m_{ij}}^{\beta_u} \left(\ln \left(\frac{t_{ij,m_{ij}}}{\eta_{ij,u}} \right) \right)^2}{\eta_{ij,u}^{\beta_u}} < 0$$

故 $\frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u}$ 单调递减, (13) 式有唯一解, 证毕。

由 (14) 式得 $\eta_{ij,u}$ 的极大似然估计 $\hat{\eta}_{ij,u}$ 为

$$\hat{\eta}_{ij,u} = \left(\frac{T_{ij}(\beta_u)}{N_{ij,u}} \right)^{1/\beta_u} \quad (15)$$

$\eta_{ij,u}, \beta_u > 0$, 因此对于确定的 $\beta_u, \eta_{ij,u}$ 存在且唯一。

2.2 渐进置信区间

由于参数极大似然估计的精确分布推导复杂, 计算困难, 难以获得参数的精确区间估计, 本节采用渐进似然理论构建参数的渐进置信区间。通过对参数的观测 Fisher 信息矩阵求逆获得参数的渐进方差-协方差矩阵。

参数 $\hat{\theta}_u = (\hat{\beta}_u, \hat{\eta}_{11,u}, \hat{\eta}_{12,u}, \dots, \hat{\eta}_{kl,u})$ 的观测 Fisher 信息矩阵为

$$\hat{I}(\hat{\theta}_u) = (\hat{I}_{ij}(\hat{\theta}_u))_{(kl+1)(kl+1)} = \left(-\frac{\partial^2 \ln L_u}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{\theta=\hat{\theta}_u} \quad i, j = 1, 2, \dots, kl+1 \quad (16)$$

参数 MLE 的方差-协方差矩阵为

$$\hat{V}(\hat{\theta}_u) = [\hat{I}(\hat{\theta}_u)]^{-1}$$

矩阵 $\hat{V}(\hat{\theta}_u)$ 对角线上的元素为对应参数的方差, 即

$$\lim_{\beta_u \rightarrow +\infty} \frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u} \ln \eta_{ij,u} + \ln \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) < 0$$

对任意 i, j , 存在 $t_{ij,m_{ij}} > \eta_{ij,u}$ 时

$$\lim_{\beta_u \rightarrow +\infty} \frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u} = -\infty$$

故 $\frac{\partial \ln L_u}{\partial \beta_u} = 0$ 有解。

(12) 式对 β_u 求二阶导得

$$\text{var}(\hat{\eta}_{11,u}) = \hat{V}_{11}, \text{var}(\hat{\eta}_{12,u}) =$$

$$\hat{V}_{22}, \dots, \text{var}(\hat{\eta}_{kl,u}) = \hat{V}_{(kl)(kl)}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_u) = \hat{V}_{(kl+1)(kl+1)}$$

对给定的置信水平 $100(1 - \gamma)\%$, 参数 $\hat{\beta}_u, \hat{\eta}_{ij,u}$ 的渐进置信区间为

$$[\hat{\beta}_u - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{(kl+1)(kl+1)}}, \hat{\beta}_u + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{(kl+1)(kl+1)}}]$$

$$[\hat{\eta}_{ij,u} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{[(i-1)l+j][(i-1)l+j]}},$$

$$\hat{\eta}_{ij,u} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}_{[(i-1)l+j][(i-1)l+j]}}]$$

$$(i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, l; u=1, 2)$$

$z_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的 $\alpha/2$ 分位数。

3 Bayes 估计

3.1 后验分布

Bayes 方法能结合先验信息与样本信息对未知参数进行估计, 是传统估计方法的一种有效替代方法。本节采用 Bayes 方法, 在平方损失函数下获取参数 $(\beta_u, \eta_{11,u}, \eta_{12,u}, \dots, \eta_{kl,u})$ 的点估计和区间估计。根据文献[21]所述, 令 $\lambda_{ij,u} = 1/\eta_{ij,u}^{\beta_u}, u=1, 2,$

选用无信息先验作为参数 $\lambda_{11,u}, \lambda_{12,u}, \dots, \lambda_{kl,u}$ 的先验分布,选取 Gamma 分布作为参数 β_u 的先验分布,形式为:

$$g_1(\beta_u) \propto \beta_u^{a_u-1} e^{-b_u \beta_u}, \quad u = 1, 2$$
$$g_2(\lambda_{ij,u}) \propto \frac{1}{\lambda_{ij,u}},$$
$$u = 1, 2; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, l$$

其中,超参数 a_u, b_u 均为非负常数。于是参数 $\omega_u = (\beta_u, \lambda_{11,u}, \lambda_{12,u}, \dots, \lambda_{kl,u})$ 联合先验分布表示为

$$\pi_1(\omega_u) \propto \frac{\beta_u^{a_u-1} e^{-b_u \beta_u}}{\lambda_{11,u} \lambda_{12,u} \dots \lambda_{kl,u}} \quad (17)$$

根据 (10) 和 (17) 式得到参数联合后验密度函数

$$\pi_2(\omega_u | t) = \frac{L_u(t | \omega_u) \pi_1(\omega_u)}{\int_{\Omega} L_u(t | \omega_u) \pi_1(\omega_u) d\omega_u} \propto$$
$$\beta_u^{a_u-1 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \lambda_{ij,u}^{N_{ij,u}-1} \right) \cdot$$
$$\left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) \beta_u^{-1} \exp[-b_u \beta_u -$$
$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lambda_{ij,u} T_{ij}(\beta_u)] \quad (18)$$

式中

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\omega_u = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} (\cdot) d\beta_u d\lambda_{11,u} d\lambda_{12,u} \dots d\lambda_{kl,u}$$

由于后验分布的形式十分复杂,难以求得 Bayes 估计的显式表达式,故而采用 Gibbs 抽样算法来解决这一问题。

3.2 Gibbs 抽样算法

由 (18) 式可以得到 $(\beta_u, \lambda_{11,u}, \lambda_{12,u}, \dots, \lambda_{kl,u})$ 等参数的全条件密度

$$\pi_3(\beta_u | \lambda_u; t) \propto \beta_u^{a_u-1 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{ij,u}} \cdot$$
$$\left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \prod_{s=1}^{m_{ij}} t_{ij,s}^{\delta_{ij}(\alpha_{ij,s})} \right) \beta_u^{-1} \cdot$$
$$\exp[-b_u \beta_u - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lambda_{ij,u} T_{ij}(\beta_u)] \quad (19)$$

$$\pi_4(\lambda_{ij,u} | \beta_u, \lambda_{u,-ij}; t) \propto \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l \lambda_{ij,u}^{N_{ij,u}-1} \right) \cdot$$
$$\exp[-\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lambda_{ij,u} T_{ij}(\beta_u)] \quad (20)$$

式中

$$\lambda_u = (\lambda_{11,u}, \lambda_{12,u}, \dots, \lambda_{kl,u})$$

$\lambda_{u,-ij} = (\lambda_{11,u}, \dots, \lambda_{(i-1)j,u}, \lambda_{i(j+1),u}, \dots, \lambda_{kl,u})$
 β_u 的全条件密度是对数凹函数,证明详见文献 [22],并且由 (20) 式可知 $\lambda_{ij,u}$ 的全条件密度服从参数为 $N_{ij,u}$ 和 $T_{ij}(\beta_u)$ 的 Gamma 分布。通过 Gibbs 抽样得到后验分布随机样本的流程如下

- Step1 给定参数的初值 $(\beta_u^{(0)}, \lambda_{11,u}^{(0)}, \dots, \lambda_{kl,u}^{(0)})$, 可以选择 MLE 的结果作为初值;
- Step2 设置迭代步数 $q = 0$;
- Step3 采用 Metropolis-Hasting(M-H) 算法 (或自适应拒绝抽样) 从 $\pi(\beta_u | \lambda_u; t)$ 中生成 $\beta_u^{(q+1)}$;
- Step4 从 $\text{Gamma}(N_{ij,u}, T_{ij}(\beta_u^{(q+1)}))$ 中生成 $\lambda_{ij,u}^{(q+1)}$, 并计算 $\eta_{ij,u}^{(q+1)} = (\lambda_{ij,u}^{(q+1)})^{-1/\beta_u^{(q+1)}}$ 。设置 $q = q + 1$;
- Step5 重复 Step3 ~ 4 N_g 次,并且给定预烧期 $A(\text{burnin period})$, 最终得到平方损失下参数的 Bayes 估计

$$\hat{\eta}_{ij,u}^B = \frac{\sum_{q=A+1}^{N_g} \eta_{ij,u}^{(q)}}{N_g - A}, \hat{\beta}_u^B = \frac{\sum_{q=A+1}^{N_g} \beta_u^{(q)}}{N_g - A} \quad (21)$$

根据文献[23]提出的 MC 方法,HPD 可信区间构建方法如下:

- 1) 将 Gibbs 抽样中得到的 $(\beta_u^{(q)}, \eta_{ij,u}^{(q)})$ 升序排列,得到 $\beta_u^1 \leq \beta_u^2 \leq \dots \leq \beta_u^{N_g}, \eta_{ij,u}^1 \leq \eta_{ij,u}^2 \leq \dots \leq \eta_{ij,u}^{N_g}$ 。
- 2) 计算 $100(1 - \alpha)\%$ 的可信区间 $[\beta_u^{q+(1-\alpha) \cdot N_g}, [\eta_{ij,u}^q, \eta_{ij,u}^{q+(1-\alpha) \cdot N_g}]] (q = 1, 2, \dots, N_g - (1 - \alpha)N_g)$ 。
- 3) 从 $[\beta_u^q, \beta_u^{q+(1-\alpha) \cdot N_g}], [\eta_{ij,u}^q, \eta_{ij,u}^{q+(1-\alpha) \cdot N_g}]$ 中选择最短的区间作为 $(\hat{\beta}_u^B, \hat{\eta}_{ij,u}^B)$ 的 HPD 可信区间。

4 产品特征寿命估计

正常应力下参数 $\eta_{00,u}$ 的估计值由 (22) 式计算得到

$$\eta_{00,u} = \exp(\hat{c}_{0u} + \hat{c}_{1u} \varphi_1(S_0^1) + \hat{c}_{2u} \varphi_2(S_0^2)) \quad (22)$$

再利用最小二乘法获得参数 $(\hat{c}_{0u}, \hat{c}_{1u}, \hat{c}_{2u})$ 的估计值。

令 $\varphi_1^i = \varphi_1(S_i^1), \varphi_2^j = \varphi_2(S_j^2)$

$$\boldsymbol{X}_u = \begin{bmatrix} \ln \eta_{11,u} \\ \vdots \\ \ln \eta_{1l,u} \\ \ln \eta_{21,u} \\ \vdots \\ \ln \eta_{2l,u} \\ \vdots \\ \ln \eta_{kl,u} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_u = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_1^1 & \varphi_2^l \\ 1 & \varphi_1^2 & \varphi_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_1^2 & \varphi_2^l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_1^k & \varphi_2^l \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_u = \begin{bmatrix} c_{0u} \\ c_{1u} \\ c_{2u} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\boldsymbol{X}_u = \boldsymbol{A}_u \boldsymbol{c}_u (u = 1, 2, \cdots, m)$ 。利用最小二乘法得到 $\boldsymbol{c}_u$ 的估计为

$$\hat{\boldsymbol{c}}_u = (\boldsymbol{A}_u^T \boldsymbol{A}_u)^{-1} \boldsymbol{A}_u^T \boldsymbol{X}_u \quad (24)$$

5 数值模拟与数据分析

本节采用数值模拟评估所提的 MLE 与 Bayes 估计方法的表现。考虑以温度和电压作为加速应力,每组应力有 4 个加速应力水平,分别为

$T_1 = 358 \text{ K}, T_2 = 378 \text{ K}, T_3 = 398 \text{ K}, T_4 = 418 \text{ K}$

$V_1 = 145 \text{ V}, V_2 = 160 \text{ V}, V_3 = 175 \text{ V}, V_4 = 190 \text{ V}$

正常应力水平为 $T_0 = 338 \text{ K}, V_0 = 125 \text{ V}$ 。应力水平组合为 $\{(1, 2), (3, 1), (2, 4), (4, 3)\}$, 每个水平组合下投入的样本量 n_{ij} , 预定失效数 m_{ij} , 移走方案 R_{ij} 和预期时间 τ_{ij} 见表 1, 每组方案分别在预期时间为 τ_1, τ_2 时进行 AT-II PCS 恒加试验。

表 1 双应力恒加试验方案

方案 1	方案 2	方案 3
$n_{12} = n_{31} = n_{24} = n_{43} = 30$	$n_{12} = n_{31} = n_{24} = n_{43} = 30$	$n_{12} = n_{31} = n_{24} = n_{43} = 40$
$m_{12} = m_{31} = m_{24} = m_{43} = 15$	$m_{12} = m_{31} = m_{24} = m_{43} = 25$	$m_{12} = m_{31} = m_{24} = m_{43} = 20$
$R_{12} = R_{31} = R_{24} = R_{43} = (1 \times 15)$	$R_{12} = R_{31} = R_{24} = R_{43} = (1 \times 2, 0 \times 20, 1 \times 3)$	$R_{12} = R_{31} = R_{24} = R_{43} = (1 \times 20)$
	$\tau_1 = (\tau_{12} = 200, \tau_{31} = 25, \tau_{24} = 25, \tau_{43} = 4)$	
	$\tau_2 = (\tau_{12} = 450, \tau_{31} = 60, \tau_{24} = 60, \tau_{43} = 9)$	

假定产品有 2 种失效模式,加速方程为

$$\ln \eta_{ij,1} = 4.0 + 8\,000/T_i - 4\ln(V_j)$$
$$\ln \eta_{ij,2} = 6.5 + 9\,000/T_i - 5\ln(V_j)$$

由加速方程得尺度参数分别为

$$(\eta_{12,1}, \eta_{31,1}, \eta_{24,1}, \eta_{43,1}) = (422.28, 66.26, 65.10, 11.94)$$
$$(\eta_{12,2}, \eta_{31,2}, \eta_{24,2}, \eta_{43,2}) = (525.21, 68.68, 58.82, 9.09)$$

形状参数的值取为 $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.6$ 。在应力水平组合 (i, j) 下,产品的失效数据由以下步骤获得:

- 1) 根据方案给定的样本量 n_{ij} , 预定失效数 m_{ij} , 移走方案 R_{ij} , 从 PDF 为(6) 式的竞争失效 Weibull 分布中抽取 II 型逐步截尾样本 $t_{ij,1}, t_{ij,2}, \cdots, t_{ij,m_{ij}}$, 详细过程见文献[24];
- 2) 根据预期时间 τ , 找出满足 $t_{ij,J} < \tau_{ij} < t_{ij,J+1}$ 的 J , 舍弃 $t_{ij,J+2}, t_{ij,J+3}, \cdots, t_{ij,m_{ij}}$;
- 3) 从截断分布 $f_{ij}(t_{ij})/[1 - F_{ij}(t_{ij,J+1})]$ 中抽取样本量为 $(n_{ij} - J - 1 - \sum_{s=1}^J R_{ij,s})$, 失效数为 $(m_{ij} - J - 1)$ 的失效数据作为 $t_{ij,J+2}, t_{ij,J+3}, \cdots, t_{ij,m_{ij}}$;
- 4) 根据(7) 式得 $N_{ij,1} \sim B(m_{ij}, q_{ij})$, 由此抽取一

组失效机理标志 $(\alpha_{ij,1}, \alpha_{ij,2}, \cdots, \alpha_{ij,m_{ij}})$ 。

为了克服随机性,整个模拟过程重复 1 000 次。计算 Bayes 估计时,形状参数 β_u 的先验取 Gamma 分布,尺度参数 η_{ij} 取无信息先验, Gibbs 算法中迭代次数 $N_g = 2\,000$ 预烧期 $A = 200$, 提议分布为正态分布。计算得到的点估计平均值,估计的均方根误差 (root mean squared error, RMSE) 和显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时的平均置信区间长度 (mean interval length, MIL) 如表 2 所示。RMSE 按(25) 式计算

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{1\,000} \sum_{i=1}^{1\,000} (\hat{\theta}_{ui} - \theta_u)^2} \quad (25)$$

式中: $\hat{\theta}_{ui}$ 表示待估参数第 i 次计算的估计值; θ_u 表示待估参数的真值。

图 1 给出了方案 3 中当 $\tau = \tau_2$ 时 Gibbs 采样算法中的迭代路径图,各参数的值在均值附近上下波动,表明算法中的马尔科夫链已经充分混合,并收敛到平稳分布。

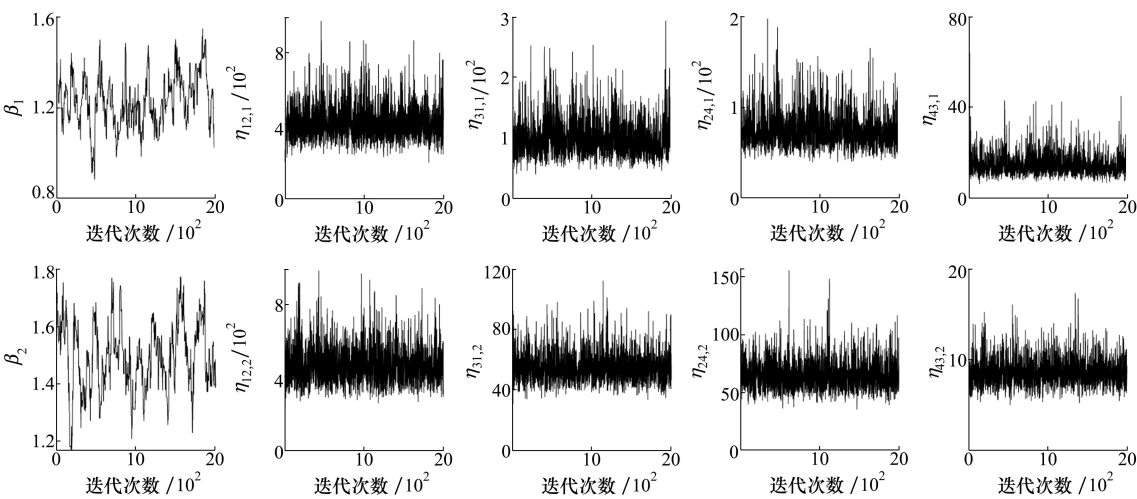


图 1 参数的迭代路径图

从表 2 中可以得到以下几点结论:

1) 随着样本数量增大,或者 m_{ij}/n_{ij} 值增大时,2 种估计方法对尺度参数 η_{ij} 的点估计均值更加接近真值,同时 RMSE 和平均置信区间长度减小,说明失效样本数量的增加能够提高估计的准确性。

2) 在同样的 (n_{ij}, m_{ij}) 下,当预期时间从 τ_1 增加

到 τ_2 时,2 种方法对于尺度参数 $\eta_{ij,1}, \eta_{ij,2}$ 的点估计均值更接近真值,同时 RMSE 与平均置信区间长度减小。这是由于 $\tau = \tau_1$ 时试验结束得快,使得观测到的失效数据较 $\tau = \tau_2$ 时更小,因此估计误差也相对较大。

表 2 参数的点估计, RMSE 和 MIL

方案	参数	$\tau_1 = (200, 25, 25, 4)$		$\tau_2 = (450, 60, 60, 9)$	
		MLE(RMSE)	Bayes(RMSE)	MLE(RMSE)	Bayes(RMSE)
		MIL	MIL	MIL	MIL
(30, 15)	β_1	1.502 4(0.288 3)	1.547 6(0.217 6)	1.604 8(0.263 6)	1.595 2(0.204 0)
		0.904 9	0.732 1	0.917 9	0.733 5
	$\eta_{12,1}$	552.013 0(1 072.7)	539.768 1(208.021 4)	450.110 6(93.702 8)	487.782 6(122.479 5)
		684.114 4	545.535 9	414.792 7	457.916 7
	$\eta_{31,1}$	132.748 1(1 383.9)	94.026 2(47.499 0)	70.508 0(15.307 6)	77.691 8(20.971 9)
		100.459 6	102.687 7	70.664 4	79.229 0
	$\eta_{24,1}$	93.109 3(273.606 1)	91.601 9(45.242 0)	70.456 5(17.700 2)	78.631 0(24.795 7)
		153.675 4	108.300 6	76.383 6	87.060 4
	$\eta_{43,1}$	14.022 1(34.578 9)	14.240 3(4.270 3)	12.474 7(2.736 1)	14.007 1(3.727 5)
		24.587 7	17.682 6	14.378 7	16.356 6
	β_2	1.535 2(0.273 4)	1.585 5(0.189 6)	1.618 3(0.316 4)	1.645 3(0.187 5)
		0.897 8	1.109 5	0.902 9	0.739 4
	$\eta_{12,2}$	740.289 3(2 246.5)	675.882 0(262.539 8)	573.234 9(136.889 6)	629.450 6(181.604 9)
		787.253 0	787.211 7	655.199 1	711.014 0
	$\eta_{31,2}$	90.814 0(42.571 9)	97.106 1(48.007 0)	74.574 6(17.842 0)	80.798 8(22.686 3)
		104.040 5	106.735 7	78.393 5	83.941 7
	$\eta_{24,2}$	73.224 1(30.203 8)	77.997 6(34.558 2)	63.219 6(14.520 8)	67.782 8(17.925 7)
		78.707 2	79.758 9	61.571 5	65.303 1
	$\eta_{43,2}$	9.608 3(1.956 0)	10.104 7(2.165 8)	9.712 5(2.060 6)	10.323 4(2.487 8)
		9.372 5	9.431 3	8.921 6	9.328 5

续表 2

方案	参数	$\tau_1=(200,25,25,4)$		$\tau_2=(450,60,60,9)$	
		MLE(RMSE)	Bayes(RMSE)	MLE(RMSE)	Bayes(RMSE)
		MIL	MIL	MIL	MIL
(30,25)	β_1	1.561 3(0.214 6)	1.578 9(0.190 6)	1.603 2(0.230 7)	1.596 1(0.197 4)
		0.722 8	0.600 3	0.742 3	0.603 4
	$\eta_{12,1}$	449.643 3(96.033 9)	468.296 2(108.560 3)	435.897 5(74.381 3)	455.632 5(85.785 3)
		326.008 8	326.761 4	294.248 9	313.009 8
	$\eta_{31,1}$	73.813 4(18.203 1)	77.400 3(21.080 9)	69.219 3(14.362 3)	72.887 1(16.701 4)
		56.509 6	58.245 2	50.361 8	54.263 9
	$\eta_{24,1}$	71.018 0(16.912 9)	74.881 9(19.853 3)	66.879 5(11.926 5)	70.795 3(14.251 0)
		60.941 7	60.113 1	51.044 7	55.707 9
	$\eta_{43,1}$	12.049 9(1.955 3)	12.806 6(2.325 4)	11.999 2(2.068 1)	12.828 9(2.476 0)
		10.505 4	11.041 5	10.004 5	11.008 2
	β_2	1.578 4(0.214 0)	1.609 5(0.182 6)	1.617 7(0.200 3)	1.623 4(0.166 4)
		0.708 6	0.601 3	0.737 1	0.607 8
	$\eta_{12,2}$	557.685 8(125.159 0)	587.400 5(144.606 2)	539.178 2(98.574 9)	572.499 4(118.745 4)
		474.039 1	486.271 9	426.385 0	469.471 5
	$\eta_{31,2}$	76.369 6(18.122 4)	79.954 7(20.903 0)	71.824 2(13.984 2)	75.603 8(16.393 8)
		59.242 6	60.816 1	52.373 9	57.109 1
	$\eta_{24,2}$	63.716 8(14.805 9)	66.414 7(16.583 7)	60.967 1(10.605 8)	63.879 3(12.139 5)
		45.785 2	47.614 8	42.529 7	45.417 7
	$\eta_{43,2}$	9.200 4(1.392 8)	9.539 9(1.530 8)	9.184 3(1.399 7)	9.551 0(1.548 4)
		6.194 4	63.508	5.963 8	6.298 8
(40,20)	β_1	1.527 7(0.403 1)	1.524 0(0.257 3)	1.590 5(0.226 6)	1.606 0(0.202 8)
		0.775 7	0.652 9	0.784 6	0.648 6
	$\eta_{12,1}$	511.787 8(308.813 5)	511.679 8(194.976 9)	440.731 8(85.731 6)	463.863 6(98.095 8)
		458.716 7	444.605 7	352.423 4	368.657 6
	$\eta_{31,1}$	87.987 4(75.294 2)	87.292 4(38.388 1)	69.136 7(13.806 5)	73.465 1(16.617 9)
		83.705 5	82.021 7	60.211 2	63.292 8
	$\eta_{24,1}$	83.114 7(76.906 0)	83.546 7(36.592 3)	68.846 0(15.270 1)	73.773 5(18.888 7)
		84.858 9	83.564 9	64.808 0	68.409 5
	$\eta_{43,1}$	12.801 4(6.977 0)	13.377 7(3.598 8)	12.503 2(2.793 0)	13.585 5(3.588 2)
		14.081 1	14.343 9	12.864 0	13.826 0
	β_2	1.555 6(0.236 2)	1.549 0(0.255 5)	1.592 2(0.200 3)	1.624 9(0.168 2)
		0.774 6	0.653 9	0.773 6	0.653 5
	$\eta_{12,2}$	618.147 4(216.924 4)	642.510 8(235.304 4)	557.479 2(117.609 2)	593.941 6(138.070 4)
		650.643 6	663.243 1	552.530 6	575.832 2
	$\eta_{31,2}$	86.958 4(32.966 9)	90.352 7(37.444 8)	72.655 4(15.926 4)	77.066 2(18.973 6)
		84.558 5	85.740 0	65.955 8	68.797 8
	$\eta_{24,2}$	71.578 9(27.379 6)	73.877 9(30.454 7)	62.210 3(12.568 1)	65.330 5(14.486 9)
		65.013 2	66.349 7	52.736 2	54.370 5
	$\eta_{43,2}$	9.444 3(1.649 5)	9.697 5(2.083 7)	9.400 4(1.615 4)	9.808 6(1.816 3)
		7.764 9	7.960 0	7.353 9	7.542 2

3) 2 种估计方法对形状参数 β_1, β_2 的估计效果在各种方案下没有显著差异,即失效样本的增加不会使形状参数的估计更准确,在实际应用中应利用设计经验或是先验信息对形状参数的估计做出更多改进与修正。

4) 当 m_{ij}/n_{ij} 较小(如方案 1 和方案 3)且试验预期时间 τ 较小时,MLE 得到的结果波动较大,特别是试验得到一些极端数据时(例如最后一个失效样本的失效时间很小),在采用 Newton-Raphson 迭代求解 MLE 时会得到异常值甚至出现迭代不收敛的情况,此时 Bayes 估计的效果优于 MLE。而当试验预期时间 τ 较大或 m_{ij}/n_{ij} 较大时,2 种估计方法的效果均能够接受,但整体上 MLE 对于尺度参数的估计值

较 Bayes 估计更接近真值,MSE 和 MIL 也较小,此类情况下 MLE 优于本文所给先验组合下的 Bayes 估计。

表 3 给出了基于上述模拟结果进行拟合得到的加速方程中未知系数的估计值,根据加速方程外推得到常应力下的特征寿命估计值以及使用时长分别为 500,1 500 和 3 000 h 时产品的可靠度估计值。方案 1 中 $\tau=\tau_1$ 时 MLE 的估计结果误差较大,故省略该情形下的估计值。从表 3 可以发现各水平组合 (i, j) 下失效样本数量以及试验预期时间 τ 对于估计准确性有显著影响。在各方案下 MLE 与 Bayes 估计对可靠度的估计值均呈现略微偏大的趋势,随着 m_{ij}/n_{ij} 和 τ 的增加,估计的结果逐渐接近于真值。

表 3 加速方程系数与常应力下特征寿命的估计

方案			c_{01}	c_{11}	c_{21}	c_{02}	c_{12}	c_{22}	$R(500)$	$R(1\ 500)$	$R(3\ 000)$
(30,15)	$\tau_1 =$	MLE	11.17	7 942.62	-5.30	7.90	9 593.44	-5.52			
	(200,25,25,4)	Bayes	3.71	7 936.16	-3.89	6.81	9 085.03	-5.09	0.958 1	0.789 2	0.498 5
	$\tau_2 =$	MLE	3.76	8 054.20	-3.97	6.77	9 038.74	-5.06	0.962 6	0.800 2	0.506 9
	(450,60,60,9)	Bayes	3.63	7 983.20	-3.89	7.03	9 105.75	-5.13	0.966 4	0.819 4	0.545 2
(30,25)	$\tau_1 =$	MLE	4.54	8 094.72	-4.14	7.13	9 079.41	-5.15	0.962 3	0.806 8	0.529 6
	(200,25,25,4)	Bayes	4.49	8 053.44	-4.10	7.26	9 111.39	-5.18	0.966 1	0.820 9	0.552 6
	$\tau_2 =$	MLE	4.36	8 044.49	-4.09	6.73	9 025.76	-5.05	0.961 5	0.794 8	0.497 6
	(450,60,60,9)	Bayes	4.32	7 997.93	-4.05	6.86	9 069.13	-5.09	0.963 4	0.805 2	0.517 9
(40,20)	$\tau_1 =$	MLE	5.11	8 224.85	-4.29	7.56	9 232.66	-5.29	0.970 7	0.851 4	0.627 4
	(200,25,25,4)	Bayes	4.84	8 138.86	-4.20	7.72	9 254.73	-5.33	0.969 3	0.845 6	0.616 0
	$\tau_2 =$	MLE	3.80	8 001.11	-3.95	6.57	9 056.80	-5.03	0.958 7	0.785 1	0.482 5
	(450,60,60,9)	Bayes	3.71	7 936.16	-3.89	6.81	9 096.03	-5.09	0.962 9	0.801 3	0.508 4
真值			4	8 000	-4	6.5	9 000	-5	0.949 2	0.757 1	0.448 8

6 结 论

本文提出了寿命服从 Weibull 分布的竞争失效产品在自适应Ⅱ型逐步截尾下双应力恒加试验的统计分析方法。首先建立似然函数方程,通过 Newton-Raphson 迭代得到 Weibull 分布中未知参数的 MLE,基于渐进似然理论构建参数的渐进置信区间。其次,在形状参数的先验分布为 Gamma 分布,尺度参数取无信息先验的条件下获得参数的后验密度函

数,采用 Gibbs 采样与 M-H 抽样结合的算法在平方损失下计算参数的 Bayes 估计,并基于 MC 方法建立参数的 HPD 可信区间。最后通过数值模拟验证了所提方法的可行性,结果表明:①预期试验时间 τ 对于参数估计效果有显著影响,特别是当失效样本数 m_{ij} 占投入样本数量 n_{ij} 的比例较小时,过小的 τ 会使 MLE 产生较大波动,此时建议优先考虑使用 Bayes 估计。②当失效样本数量较大时,2 种估计均有良好的表现且 MLE 的估计效果略优于本文所给先验组合下的 Bayes 估计。

参考文献:

- [1] MAO Shisong. Analysis of constant stress AFT for Weibull distribution[J]. Chinese Journal of Quality and Reliability, 2003, 6: 16-23
- [2] VOICULESCU S, GUERIN F, BARREAU M, et al. Bayesian estimation in accelerated life testing application on exponential-arrhenius model[J]. International Journal of Product Development, 2009, 7(3/4): 246-260
- [3] 马纪明, 阮凌燕, 付永领, 等. 航空液压泵加速寿命试验现状[J]. 液压与气动, 2015(6): 6-12
MA Jiming, RUAN Lingyan, FU Yongling, et al. Current status of accelerated life testing for aviation hydraulic pumps[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2015(6): 6-12 (in Chinese)
- [4] 张春华, 陈循, 温熙森. 步降应力加速寿命试验(上篇)——方法篇[J]. 兵工学报, 2005(5): 661-665
ZHANG Chunhua, CHEN Xun, WEN Xisen. Step-down-stress accelerated life testing——methodology[J]. Acta Armamentarii, 2005(5): 661-665 (in Chinese)
- [5] 张春华, 陈循, 温熙森. 步降应力加速寿命试验(下篇)——统计分析篇[J]. 兵工学报, 2005(5): 666-669
ZHANG Chunhua, CHEN Xun, WEN Xisen. Step-down-stress accelerated life testing——statistical analysis[J]. Acta Armamentarii, 2005(5): 666-669 (in Chinese)
- [6] 孙天宇, 师义民, 谢奇. Weibull 分布下双应力交叉步加试验的可靠性分析[J]. 机械强度, 2013, 35(3): 253-257
SUN Tianyu, SHI Yimin, XIE Qi. Analysis of reliability performances on two alternative step-stress accelerated life test for Weibull distribution[J]. Journal of Mechanical Strength, 2013, 35(3): 253-257
- [7] 寇海霞, 安宗文, 刘波. 双应力同步步降加速寿命试验方法[J]. 电子科技大学学报, 2016, 45(2): 316-320
KOU Haixia, AN Zongwen, LIU Bo. Double synchronous-step-down-stress accelerated life testing method[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2016, 45(2): 316-320 (in Chinese)
- [8] CHEN Juan, LI Jia, Wang Deyi, et al. Double crossed step-down-stress accelerated life testing for pneumatic cylinder based on cumulative damage model[J]. Advanced Materials Research, 2014, 871: 56-63
- [9] HAN D, BALAKRISHNAN N. Inference for a simple step-stress model with competing risks for failure from the exponential distribution under time constraint[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2010, 54(9): 2066-2081
- [10] 张春芳, 师义民, 吴敏. 逐步 I 型混合截尾下指数-威布尔分布竞争失效模型的统计分析[J]. 应用概率统计, 2018, 34(4): 331-344
ZHANG Chunfang, SHI Yimin, WU Min. Statistical inference on competing risks model from exponentiated Weibull distribution under type-I progressive hybrid censoring data[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2018, 34(4): 331-344 (in Chinese)
- [11] ALAM I, ANWAR S, SHARMA L K, et al. Competing risk analysis in constant stress partially accelerated life tests under censored information[J]. Annals of Data Science, 2023, 10(5): 1379-1403
- [12] PAREEK B, KUNDU D, KUMAR S. On progressively censored competing risks data for Weibull distributions[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2009, 53(12): 4083-4094
- [13] 黄文平, 周经伦, 宁菊红, 等. 基于竞争失效数据的 Lindley 分布参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(2): 464-469
HUANG Wenping, ZHOU Jinglun, NING Juhong, et al. Parameter estimation of Lindley distribution with competing risk data[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(2): 464-469 (in Chinese)
- [14] WANG Liang. Inference of progressively censored competing risks data from Kumaraswamy distributions[J]. Journal of Computational And Applied Mathematics, 2018, 343: 719-736
- [15] EPSTEIN B. Truncated life tests in the exponential case[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1954, 25: 555-564
- [16] KUNDU D, JOARDER A. Analysis of type-II progressively hybrid censored data[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2006, 50
- [17] NG H, KUNDU D, PING S C. Statistical analysis of exponential lifetimes under an adaptive type-II progressive censoring scheme[J]. Naval Research Logistics, 2010, 56(8): 687-698
- [18] MAHMOUD A W M, SOLIMAN A A, ABD ELLAH A, et al. Estimation of generalized pareto under an adaptive type-II progressive censoring[J]. Intelligent Information Management, 2013, 5: 73-83

[19] MOHIEELDIN M M M, AMEIN M, SHAFAY A R, et al. Estimation of generalized exponential distribution based on anadaptive progressively type-II censored sample[J]. Journal of Statistical Computatian and Simulation, 2017, 87: 1292-1304

[20] NASSAR M, ABO-KASEM O E, ZHANG C, et al. Analysis of weibull distribution under adaptive type-II progressive hybrid censoring scheme[J]. Journal of the Indian Society for Probability and Statistics, 2018(2): 1-41

[21] REN Junru, GUI Wenhao. Statistical analysis of adaptive type-II progressively censored competing risks for weibull models[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 98: 323-342

[22] WU Min, SHI Yiming, SUN Yudong. Inference for accelerated competing failure models from Weibull distribution under type-I progressive hybrid censoring[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2014, 263: 423-431

[23] CHEN Minghui, SHAO Qiman. Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals[J]. Journal of Computational & Graphical Statistics, 1999, 8(1): 69-92

[24] BALAKRISHNAN N, SANDU R A. A simple simulation algorithm for generating progressive type-II censored samples[J]. The American Stueistician, 1995, 49: 229-230

Statistical analysis of double stress accelerated life testing under adaptive type- II progressive censoring

YANG Tianle, LI Huacong, FU Jiangfeng

(School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aiming at the traditional accelerated life test only considering the single stress and single failure cause, the inference method of double stress accelerated competing risks data is studied under the adaptive type-II progressively censored and the life of test units follow Weibull distribution. The maximum likelihood estimations and the asymptotic confidence intervals of unknown parameters are obtained by using the Newton-Raphson iteration and asymptotic likelihood theory. A Gibbs sampling combining with Metropolis-Hasting algorithm method is developed to obtain Bayes estimations, and the Monte Carlo method is employed to construct the HPD credible intervals. The simulated results show that the present method has good statistical inference performance, meanwhile the failure sample size and the expected experimentation time have significant effect on the estimations.

Keywords: accelerated life testing; competing risks; Weibull distribution; maximum likelihood estimation; Bayes estimation

引用格式: 杨天乐, 李华聪, 符江锋. 自适应 II 型逐步截尾双应力恒加试验统计分析[J]. 西北工业大学学报, 2024, 42(3): 487-497

YANG Tianle, LI Huacong, FU Jiangfeng. Statistical analysis of double stress accelerated life testing under adaptive type-II progressive censoring[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2024, 42(3): 487-497 (in Chinese)