

# 活塞理论非线性项对壁板颤振特性的影响研究

骆雨潇, 叶坤, 叶正寅

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

**摘 要:**目前,活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律尚未得到系统性总结。基于一、二、三阶活塞理论建立了超声速气流下的二维简支非线性壁板颤振的运动方程。应用李雅普诺夫间接法分析受热简支壁板的稳定性,基于数值分析法对壁板颤振方程进行数值求解,研究活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律。结果表明:①在小温升比下,一阶活塞理论下壁板响应仅表现为收敛运动和单周期极限环颤振,而高阶活塞理论下,壁板响应表现更为复杂,除了上述特征之外,还存在多周期极限环颤振和混沌运动等更加复杂的非线性动力学现象;②随着马赫数的增加,一阶活塞理论和高阶活塞理论下的壁板动态响应出现显著差异时所需的动压和温升比逐渐减小;③在高马赫数与较高动压下,二阶活塞理论和三阶活塞理论的计算结果出现显著差异,同时在高温升比下,也会出现相同的现象;④当壁板动态响应特征基本一致时,高阶活塞理论计算的位移响应峰值通常小于一阶活塞理论计算结果,最大误差可达到约 16.66%。文中研究结果对于实际工程应用中在不同条件下如何选择适用的简支壁板颤振分析方法具有一定参考价值。

**关 键 词:**活塞理论;稳定性;壁板颤振;数值模拟

中图分类号:V215.3

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2024)04-0577-11

壁板颤振是飞行器蒙皮在气动力、弹性力和惯性力的耦合作用下产生的一种自激振动<sup>[1]</sup>,壁板颤振会引起蒙皮横向大幅值极限环颤振,导致蒙皮的疲劳、开裂,对飞行器的飞行性能产生非常不利的影响<sup>[2]</sup>。未来超声速和高超声速飞行器都面临着结构轻量化设计的挑战,因此,薄壁结构将是结构设计的必然趋势。对于此类飞行器的结构,在超声速或高超声速下进行壁板的气动弹性分析极为重要。

近几十年来,许多学者围绕壁板颤振开展了大量的研究。在理论方面,Dowell<sup>[3]</sup>对 1970 年以前人们在壁板颤振领域的诸多研究成果做出了全面性的总结,他以其应用的结构理论和气动力理论为标准,将壁板颤振的分析问题分为了 4 大类。Gary 等<sup>[4]</sup>对 Dowell 的分类做出了进一步的细分和延伸,提出了第五种方法,即结构理论为非线性,气动力应用非

线性活塞理论计算的方法。Cheng 等<sup>[5]</sup>后续又总结之前学者的经验、结论,将分析壁板颤振的方法扩展出第 6 类,即结构理论为非线性,气动力采用 Euler 或 N-S 方程计算的方法。在数值模拟方面,McIntosh 和 Eastep 等<sup>[6-7]</sup>在分析中将二阶活塞理论的非线性项加入壁板振动方程,分析了气动力的非线性效应对壁板颤振特性的影响。结果表明,气动力的非线性使得飞行器壁板的振动在内部空腔一侧的振幅较大。陈大林等<sup>[8]</sup>基于三阶活塞理论的壁板颤振方程,用数值积分法求解了时域内壁板的非线性颤振响应,发现了受热壁板复杂的动力学现象如:收敛运动、单周期的极限环振动、多周期颤振响应以及混沌运动等。杨智春等<sup>[9]</sup>基于带有曲率修正的一阶活塞理论壁板颤振方程,分析了动压参数对受热二维曲壁板分岔特性的影响,发现了初始几何曲率与气动热效应使得曲壁板具有复杂的动力学特性,不再像平壁板一样,经过倍周期分岔进入混沌,而会出现由静变形状态直接进入混沌运动的现象。Zhu 等<sup>[10]</sup>基于活塞理论气动力模型建立了预拉伸位移受热壁板的非线性动力学方程,发现了预

收稿日期:2023-07-15

基金项目:国家自然科学基金重点项目(U2341241)与国家自然科学基金面上项目(12272306)资助

作者简介:骆雨潇(2000—),硕士研究生

通信作者:叶坤(1987—),副研究员 e-mail:yekun@nwpu.edu.cn

拉伸法可以显著提高超声速壁板的颤振临界动压。刘成等<sup>[11]</sup>通过研究活塞理论在单侧气流和双侧气流的物面振动中的应用,分析这 2 种不同研究对象的气动力非线性效应,发现了在单侧气流的物面振动中,气动力非线性效应显著,需要运用高阶活塞理论。Meng 等<sup>[12]</sup>建立了含激波膨胀波项的活塞理论 (SEPT),将其和活塞理论进行对比,发现 SEPT 与活塞理论对非线性气动力的模拟结果是等效的,说明活塞理论高阶项实际上是一种弱激波膨胀波的非线性效应。Meng 等<sup>[13]</sup>通过对活塞理论各阶项进行频谱分析,发现活塞理论的非线性特征是其各阶项之间相互作用、相互制衡的结果。

从上述文献中可以看出,在超声速或高超声速非定常气动力的计算中,活塞理论被广泛运用于壁板颤振分析中。随着马赫数的增加,气动力的非线性效应对壁板颤振产生较大影响。研究表明,在  $Ma > 5$  的高超声速阶段,采用三阶活塞理论能够较好地体现气动力的非线性效应<sup>[1]</sup>。因此,高阶活塞理论与一阶活塞理论所计算的壁板颤振结果会产生较大的差异。但是,前人对超声速壁板颤振的研究多是基于单一的气动力模型所建立的壁板颤振方程进行的,对于不同阶活塞理论的非线性因素对壁板颤振的影响规律并没有进行系统深入的研究。因此,研究不同阶活塞理论的非线性因素对颤振结构

的影响规律具有重要的学术价值,同时也具有重要的工程意义。

为了系统研究活塞理论非线性因素对壁板颤振的影响规律,本文首先建立了基于一阶、二阶、三阶活塞理论,考虑热应力的几何非线性二维壁板运动方程,然后应用数值积分的方法对上述方程进行求解,分别得到了以动压和温升比为可变参数的位移响应峰值图,最后通过位移响应峰值图,总结出活塞理论不同非线性项对壁板颤振的影响规律。

## 1 超声速气流中二维非线性壁板运动方程

### 1.1 气动力模型

一阶活塞理论的超声速气动力为

$$\Delta p = p - p_{\infty} = \frac{2q_{\infty}}{Ma} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V_{\infty}} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (1)$$

而考虑气动力的非线性时,添加非线性项,则得到二阶以及三阶活塞理论的超声速气动力分别如 (2)~(3) 式所示。

$$\Delta p = \frac{2q}{Ma} \left[ \frac{1}{V_{\infty}} \dot{w} + w_{,x} + \frac{(1+\gamma)Ma}{4} \left( \frac{1}{V_{\infty}} \dot{w} + w_{,x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\Delta p = \frac{2q}{Ma} \left[ \frac{1}{V_{\infty}} \dot{w} + w_{,x} + \frac{(1+\gamma)Ma}{4} \left( \frac{1}{V_{\infty}} \dot{w} + w_{,x} \right)^2 + \frac{(1+\gamma)Ma^2}{12} \left( \frac{1}{V_{\infty}} \dot{w} + w_{,x} \right)^3 \right] \quad (3)$$

### 1.2 壁板运动微分方程

考虑一个两端简支的二维壁板,壁板上表面有超声速气流流过,气体的速度、密度、马赫数分别为

$V_{\infty}, \rho_{\infty}, Ma_{\infty}$ 。壁板长度为  $a$ ,厚度为  $h$ ,密度为  $\rho$ 。

考虑热应力的无量纲壁板颤振方程为

$$\ddot{W} + R_T W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi\xi\xi} - R_x W_{,\xi\xi} + \lambda \left[ \sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} + \frac{(1+\gamma)c_2 s Ma}{4} \left( \sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} \right)^2 + \frac{(1+\gamma)c_3 s^2 Ma^2}{12} \left( \sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \dot{W} + W_{,\xi} \right)^3 \right] = 0 \quad (4)$$

式中:  $\xi = x/a, W = w/h, \tau = t \sqrt{D/\rho ha^4}, \lambda = 2qa^3/(DMA), s = h/a, \mu = \rho_{\infty} a/(\rho h), R_T = N_T a^2/D, R_x = N_x \frac{a^2}{D}; c_2$  和  $c_3$  为系数,取 0 或 1,当两者均取 0 时,则为一阶活塞理论下的壁板运动微分方程,当  $c_2$  取 1,  $c_3$  取 0 时,则为二阶活塞理论下的壁板运动微分方程,当二者均取 1 时,则为三阶活塞理论下的壁

板运动微分方程。

### 1.3 控制方程的离散化

根据简支边界条件可知

$$W|_{\xi=0,1} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0,1} = 0 \quad (5)$$

取满足边界条件的试函数为  $\sin(n\pi\xi), n = 1, 2, \dots$ 。将位移函数展开为若干试函数的线性叠加,

则位移函数设为

$$W(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^N g_n(\tau) \sin(n\pi\xi) \quad (6)$$

式中,广义坐标为  $g_n(\tau)$ 。将(6)式代入(4)式中,

$$\begin{aligned} \dot{g}_k &= g_{N+k} \\ \ddot{g}_{N+k} &= -[(k\pi)^4 - R_T(k\pi)^2]g_k - \sqrt{\lambda\mu/Ma}g_{N+k} - 3(k\pi^2) \left[ \sum_{i=1}^N (i\pi)^2 g_i^2 \right] g_k - \lambda \sum_{j=1}^N \frac{2kj}{k^2 - j^2} [1 - (-1)^{k+j}] g_j - \\ &\quad \frac{(1+\gamma)sMa\lambda}{2} \left[ \frac{\mu}{\lambda Ma} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \delta_1 g_{n+N} g_{m+N} + 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N m\pi\delta_2 g_{n+N} g_m + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N nm\pi^2\delta_3 g_n g_m \right] - \\ &\quad \frac{(1+\gamma)s^2Ma^2\lambda}{6} \left[ \left( \frac{\mu}{\lambda Ma} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N \delta_4 g_{n+N} g_{m+N} g_{l+N} + \frac{3\mu}{\lambda Ma} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N l\pi\delta_5 g_{n+N} g_{m+N} g_l + \right. \\ &\quad \left. 3\sqrt{\frac{\mu}{\lambda Ma}} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N ml\pi^2\delta_6 g_{n+N} g_m g_l + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N nml\pi^3\delta_7 g_n g_m g_l \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_2 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_3 &= \int_0^1 \cos(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_4 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \sin(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_5 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_6 &= \int_0^1 \sin(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \\ \delta_7 &= \int_0^1 \cos(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \cos(l\pi\xi) \sin(k\pi\xi) d\xi \end{aligned}$$

## 2 超声速气流中二维非线性壁板稳定性分析

为了方便本文后续基于数值分析法对壁板颤振特性进行分析,现对二维非线性壁板的稳定性进行分析,得出壁板稳定性区域图,为后续数值分析法求解的参数取值范围提供依据,同时根据壁板稳定性区域图,验证计算所得到的壁板动力学行为的正确性。

以一阶活塞理论为例,对超声速气流中二维非线性壁板的稳定性进行分析。

将一阶活塞理论的壁板运动微分方程中所有状态变量对时间的导数全取为 0,可以得出壁板的静

应用 Galerkin 法<sup>[14]</sup> 求解(4)式,假设壁板变形主要由其前  $N$  阶谐波模态函数构成(只用前  $N$  阶模态函数的叠加来表示壁板的位移函数),设  $g = dg/d\tau$ ,即可得到降阶后的壁板运动方程

态方程

$$\begin{aligned} &[(k\pi)^4 - R_T(k\pi)^2]g_k + 3(k\pi^2) \left[ \sum_{i=1}^N (i\pi)^2 g_i^2 \right] g_k + \\ &\lambda \sum_{j=1}^N \frac{2kj}{k^2 - j^2} [1 - (-1)^{k+j}] g_j = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$g_i = 0 (i = 1, 2, 3 \cdots n)$  为该方程的一个解,对应着无变形的壁板平衡状态( $P_0$ )。

可以假设系统形变  $\hat{a}_i$  由静形变  $a_i$  和小扰动量  $\varepsilon_i$  构成,即:  $\hat{a}_i = a_i + \varepsilon_i$ ,  $\hat{a}_{i+N} = \varepsilon_{i+N} (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ ,则在壁板平衡状态下( $P_0$ )下,方程(8)可线化为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (9)$$

式中,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2N}]^T$ ,  $\mathbf{A}$  为方程(8)在状态  $P_0$  下的雅各比矩阵,该方程的特征方程有复特征值  $\Omega = \beta \pm i\omega$ ,由李雅普诺夫间接法<sup>[15-17]</sup> 得:当  $\beta > 0$  时系统不稳定,当  $\beta < 0$  时系统稳定,当  $\omega = 0$  时系统静态屈曲失稳。实部  $\beta$  中包含动压和温升比 2 个参数,温升比通过改变壁板颤振方程(4)中的参数面致热应力  $R_T$  影响壁板颤振,两者相互独立,取  $N = 6$ ,根据雅各比矩阵特征值实部随动压和温升比的变化,得到如图 1 所示的壁板稳定性区域图。

图中区域 I 为渐进稳定区,在此区域内,壁板最终都会稳定在平壁板状态,颤振幅值最终收敛为 0。

区域 II 为基本型颤振区,在该区域内,壁板将发生动态失稳,即极限环运动(非线性限幅振荡),甚至发生混沌运动等复杂动力学行为。

区域 III 为屈曲区(静态失稳),在区域内,壁板都会稳定在屈曲变形状态。

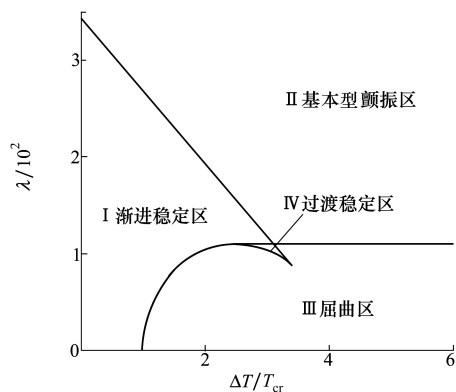


图 1 壁板稳定性区域图

区域Ⅳ为过渡稳定区,在此区域内,壁板有可能稳定在屈曲变形状态,也可能稳定在平壁板状态。

二阶和三阶活塞理论与一阶活塞理论相同,  $g_i=0(i=1,2,3,\cdots,n)$  为该方程的一个解,对应着无变形的壁板平衡状态( $P_0$ ),在该状态下,二阶、三阶活塞理论下的雅各比矩阵相同。应用李雅普诺夫间接法判断此平衡状态下系统的稳定性,可以得到相同的壁板区域稳定性图。

3 结果与分析

3.1 不同动压下非线性项对壁板颤振的影响

本文旨在研究超声速气流下活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律。随着马赫数增大,气动力的非线性效应会显著增长,为深度探究活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律,选取  $Ma=2.0,4.0,6.0,8.0$  这 4 个状态,使马赫数范围覆盖超声速至高超声速。为了细致研究不同动压下活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律,使模拟结果更加完整,包含所有壁板动态响应情况,结合壁板稳定性区域图,统一取温升比为  $\Delta T/T=2$ ,动压  $0\sim1\,500$ ,分别基

于一阶、二阶、三阶活塞理论采用四阶龙格-库塔法对壁板颤振进行数值模拟和分析。

无量纲时间步长  $\tau=0.001$ ,初值取一阶广义速度为 0.1。位移监测点取壁板流向  $\bar{x}=0.75$  位置。

3.1.1  $Ma=2.0$  状态

图 2 为  $Ma=2.0$  不同活塞理论下无量纲位移随动压变化的分叉图。如图 2 所示,根据极限环幅值随动压的变化特征,将整个动压范围划分为 7 个阶段。

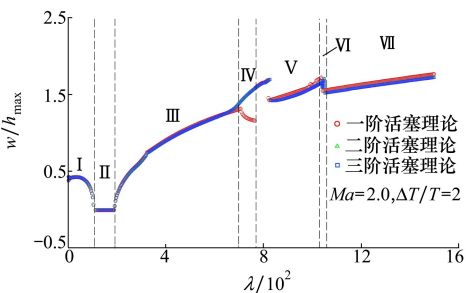


图 2 不同活塞理论下壁板  $\bar{x}=0.75$  处位移随动压变化的分叉图( $Ma=2$ )

如表 1 所示, $Ma=2.0$  时,阶段Ⅰ~Ⅶ的壁板动力学特性及颤振幅值随动压变化规律为:

- 1) 阶段Ⅰ,当  $\lambda < 108$  时,一、二、三阶活塞理论计算结果基本一致,壁板稳定在屈曲变形状态。
- 2) 阶段Ⅱ,当  $108 \leq \lambda < 192$  时,一、二、三阶活塞理论计算结果一致,壁板稳定在平壁板状态。
- 3) 阶段Ⅲ,当  $192 \leq \lambda < 708$  时,二、三阶活塞理论计算的极限环颤振幅值略小于一阶活塞理论计算的极限环颤振幅值。壁板动态响应均表现为单周期极限环振动,颤振幅值随着动压的增加而增大。
- 4) 阶段Ⅳ,当  $708 \leq \lambda < 768$  时,壁板动态响应均表现为单周期极限环振动。在一阶活塞理论下,颤振幅值随着动压的增加而减小。在二、三阶活塞理论下,颤振幅值随动压的增加而增大。

表 1 不同活塞理论在不同动压阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=2$ )

| 动压                             | 一阶        | 二阶        | 三阶        |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lambda < 108$                | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    |
| $108 \leq \lambda < 192$       | 平壁板状态     | 平壁板状态     | 平壁板状态     |
| $192 \leq \lambda < 708$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $708 \leq \lambda < 768$       | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 |
| $768 \leq \lambda < 1\,041$    | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $1\,041 \leq \lambda < 1\,050$ | 单周期极限环    | 多周期极限环    | 多周期极限环    |
| $\lambda \geq 1\,050$          | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |

5) 阶段 V,当  $768 \leq \lambda < 1\,041$  时,与阶段 III 规律相同,但在  $\lambda = 822$  时,壁板颤振幅值出现跳变,在  $\lambda > 822$  时,壁板颤振幅值相比之前大幅减小。

6) 阶段 VI,当  $1\,041 \leq \lambda < 1\,050$  时,在二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为多周期极限环振动,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着动压的增加而增大。

7) 阶段 VII,当  $\lambda \geq 1\,050$  时,与阶段 III 规律相同。

3.1.2  $Ma=4.0$  状态

图 3 为  $Ma=4.0$  不同活塞理论下无量纲位移随动压变化分叉图。如图 3 所示,根据极限环幅值随动压的变化特征,将整个动压范围划分为 7 个阶段。

如表 2 所示,在  $Ma=4.0$  时,阶段 I ~ V, VII 的规律分别与前述  $Ma=2.0$  时的阶段 I ~ V, VII 的规

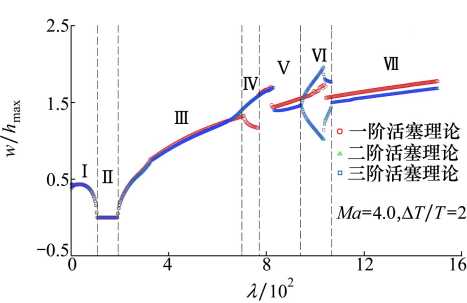


图 3 不同活塞理论下  $\bar{x}=0.75$  处位移随动压变化的分叉图 ( $Ma=4$ )

律相同,因此不再赘述。

阶段 VI,当  $936 \leq \lambda < 1\,068$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,颤振幅值随着动压的增加而增大。二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为二周期极限环振动。

表 2 不同活塞理论在不同动压阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=4$ )

| 动压                          | 一阶        | 二阶        | 三阶        |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lambda < 108$             | 曲变形状态     | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    |
| $108 \leq \lambda < 192$    | 平壁板状态     | 平壁板状态     | 平壁板状态     |
| $192 \leq \lambda < 708$    | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $708 \leq \lambda < 768$    | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 |
| $768 \leq \lambda < 936$    | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $936 \leq \lambda < 1\,068$ | 单周期极限环    | 二周期极限环    | 二周期极限环    |
| $\lambda \geq 1\,068$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |

3.1.3  $Ma=6.0$  状态

图 4 为  $Ma=6.0$  不同活塞理论下无量纲位移随动压变化分叉图。根据极限环幅值随动压的变化特征,将整个动压范围划分为 10 个阶段。

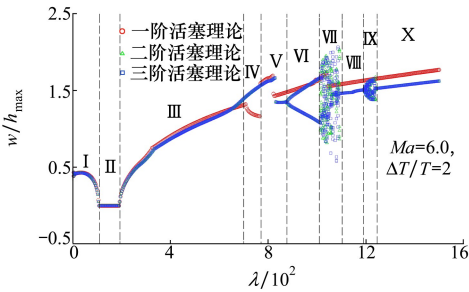


图 4 不同活塞理论下  $\bar{x}=0.75$  处位移随动压变化的分叉图 ( $Ma=6$ )

如表 3 所示,在  $Ma=6.0$  时,阶段 I ~ V 分别与前述  $Ma=2.0$  时阶段 I ~ V 规律相同,阶段 VIII 和 X 与前述  $Ma=2.0$  时阶段 VII 规律相同,阶段 VI 与前述  $Ma=4.0$  时阶段 VI 规律相同,因此不再赘述。

1) 阶段 VII,当  $1\,017 \leq \lambda < 1\,095$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,颤振幅值随着动压的增加而增大。二、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为混沌运动。

2) 阶段 IX,当  $1\,194 \leq \lambda < 1\,248$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着动压的增加而增大。二、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为多周期极限环振动。

表 3 不同活塞理论在不同动压阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=6$ )

| 动压                             | 一阶        | 二阶        | 三阶        |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lambda < 108$                | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    |
| $108 \leq \lambda < 192$       | 平壁板状态     | 平壁板状态     | 平壁板状态     |
| $192 \leq \lambda < 708$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $708 \leq \lambda < 768$       | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 |
| $768 \leq \lambda < 867$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $867 \leq \lambda < 1\ 017$    | 单周期极限环    | 二周期极限环    | 二周期极限环    |
| $1\ 017 \leq \lambda < 1\ 095$ | 单周期极限环    | 混沌运动      | 混沌运动      |
| $1\ 095 \leq \lambda < 1\ 194$ | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $1\ 194 \leq \lambda < 1\ 248$ | 单周期极限环    | 多周期极限环    | 多周期极限环    |
| $\lambda \geq 1\ 248$          | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |

3.1.4  $Ma=8.0$  状态

图 5 为  $Ma=8.0$  不同活塞理论下无量纲位移随动压变化分叉图。如图 5 所示,根据极限环幅值随动压的变化特征,将整个动压范围划分为 14 个阶段。

如表 4 所示,在  $Ma=8.0$  时,阶段 I ~ II, VIII ~ IX 分别与前述  $Ma=2.0$  时阶段 I ~ II, IV ~ V 规律相同,阶段 III, V, VII, XII, XIV 与前述  $Ma=2.0$  时阶段 VII 规律相同,此时阶段 XIV 高阶活塞理论计算响应峰值与一阶活塞理论计算响应峰值误差达到最大,约为 16.66%。阶段 IV, VI, X 与前述  $Ma=4.0$  时阶

段 VI 规律相同,阶段 XI, X III 分别与前述  $Ma=6.0$  时的阶段 VII, IX 规律相同,因此,在此不再赘述。

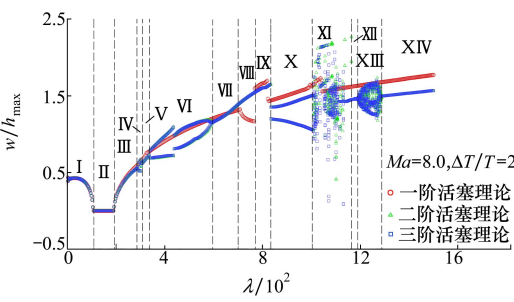


图 5 ,不同活塞理论下  $\bar{x}=0.75$  处位移随动压变化的分叉图 ( $Ma=8$ )

表 4 不同活塞理论在不同动压阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=8$ )

| 动压                             | 一阶        | 二阶        | 三阶        |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lambda < 108$                | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    | 屈曲变形状态    |
| $108 \leq \lambda < 192$       | 平壁板状态     | 平壁板状态     | 平壁板状态     |
| $192 \leq \lambda < 288$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $288 \leq \lambda < 309$       | 单周期极限环    | 二周期极限环    | 二周期极限环    |
| $309 \leq \lambda < 339$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $339 \leq \lambda < 600$       | 单周期极限环    | 二周期极限环    | 二周期极限环    |
| $600 \leq \lambda < 708$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $708 \leq \lambda < 768$       | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 | 单周期非对称极限环 |
| $768 \leq \lambda < 837$       | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $837 \leq \lambda < 1\ 011$    | 单周期极限环    | 二周期极限环    | 二周期极限环    |
| $1\ 011 \leq \lambda < 1\ 164$ | 单周期极限环    | 混沌运动      | 混沌运动      |
| $1\ 164 \leq \lambda < 1\ 191$ | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |
| $1\ 191 \leq \lambda < 1\ 290$ | 单周期极限环    | 多周期极限环    | 多周期极限环    |
| $\lambda \geq 1\ 290$          | 单周期极限环    | 单周期极限环    | 单周期极限环    |

3.2 不同温升比下非线性项对壁板颤振的影响

马赫数状态和其他参数选取与 3.1 节相同,结合壁板稳定性区域图,统一取动压为  $\lambda = 300$ ,温升比  $0 \sim 8$ ,分别基于一阶、二阶、三阶活塞理论,采用四阶龙格-库塔法对壁板颤振进行数值模拟和分析。

3.2.1  $Ma = 2.0$  状态

图 6 为  $Ma = 2.0$  不同活塞理论下无量纲位移随温升比变化的分叉图。根据极限环幅值随温升比的变化特征,将整个温升比范围划分为 5 个阶段。

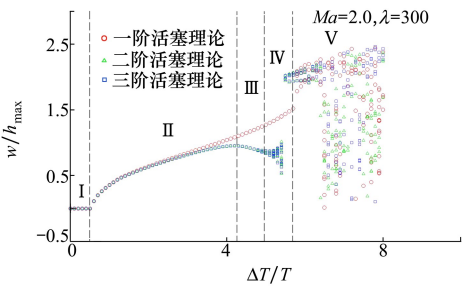


图 6 不同活塞理论下  $\bar{x} = 0.75$  处位移随温升比变化的分叉图 ( $Ma = 2$ )

如表 5 所示:

1) 阶段 I ,当  $\Delta T/T < 0.5$  时,一、二、三阶活塞理

论计算结果一致,壁板稳定在平壁板状态。

2) 阶段 II ,当  $0.5 \leq \Delta T/T < 4.2$  时,一、二、三阶活塞理论计算的壁板动态响应均表现为单周期极限环振动,颤振幅值随着温升比的增加而增大。

3) 阶段 III ,当  $4.2 \leq \Delta T/T < 4.7$  时,一阶、二阶、三阶活塞理论计算的壁板动态响应均表现为单周期极限环振动,此时一阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值随着温升比的增加而增大,二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值随着温升比的增加而减小,一阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值与二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值的差值随着温升比的增加进一步增大,二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值基本一致。

4) 阶段 IV ,当  $4.7 \leq \Delta T/T < 5.7$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着温升比的增加而增大。二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为多周期极限环振动,在  $\Delta T/T = 5.5$  时,二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值出现跳变,在  $\Delta T/T > 5.5$  时,壁板颤振幅值相比之前大幅增加。

5) 阶段 V ,当  $\Delta T/T \geq 5.7$  时,一、二、三阶活塞理论壁板响应为多周期极限环或混沌运动。

表 5 不同活塞理论在不同温升比阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma = 2$ )

| 温升比                         | 一阶          | 二阶          | 三阶          |
|-----------------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\Delta T/T < 0.5$          | 平壁板状态       | 平壁板状态       | 平壁板状态       |
| $0.5 \leq \Delta T/T < 4.2$ | 单周期极限环      | 单周期极限环      | 单周期极限环      |
| $4.2 \leq \Delta T/T < 4.7$ | 单周期极限环      | 单周期极限环      | 单周期极限环      |
| $4.7 \leq \Delta T/T < 5.7$ | 单周期非对称极限环   | 多周期极限环      | 多周期极限环      |
| $\Delta T/T \geq 5.7$       | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 |

3.2.2  $Ma = 4.0$  状态

图 7 为  $Ma = 4.0$  不同活塞理论下无量纲位移随温升比变化的分叉图。如图所示,随着温升比的增

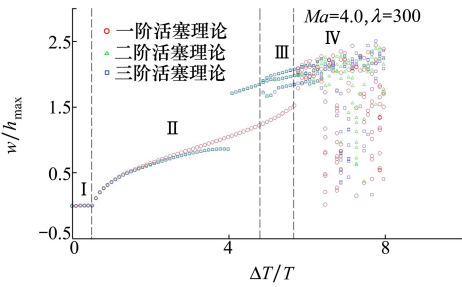


图 7 不同活塞理论下  $\bar{x} = 0.75$  处位移随温升比变化的分叉图 ( $Ma = 4$ )

加,一阶、二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应在不同温升比阶段呈现出不同的差异性。为了细致分析影响规律随温升比的变化,根据极限环幅值随温升比的变化特征,将整个温升比范围划分为 4 个阶段。

如表 6 所示,在  $Ma = 4.0$ ,阶段 I ,IV 分别与前述  $Ma = 2.0$  时阶段 I , V 的规律相同,因此,不再赘述。

1) 阶段 II ,当  $0.5 \leq \Delta T/T < 4.8$  时,一阶、二阶、三阶活塞理论计算的壁板动态响应均表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着温升比的增加而增大,同时一阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值与二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值的差值随着温升比的增加而增大,二阶、三阶活塞理论所计算的壁

板颤振幅值基本一致,在 $\Delta T/T=4$ 时,二阶、三阶活塞理论所计算的壁板颤振幅值出现跳变,在 $\Delta T/T>4$ 时,壁板颤振幅值相比之前大幅增加。

2) 阶段Ⅲ,当 $4.8\leq\Delta T/T<5.7$ 时,一阶活塞理

表 6 不同活塞理论在不同温升比阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=4$ )

| 温升比                     | 一阶          | 二阶          | 三阶          |
|-------------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\Delta T/T<0.5$        | 平壁板状态       | 平壁板状态       | 平壁板状态       |
| $0.5\leq\Delta T/T<4.8$ | 单周期极限环      | 单周期极限环      | 单周期极限环      |
| $4.8\leq\Delta T/T<5.7$ | 单周期极限环      | 多周期极限环      | 多周期极限环      |
| $\Delta T/T\geq 5.7$    | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 |

3.2.3  $Ma=6.0$  状态

图 8 为  $Ma=6.0$  不同活塞理论下无量纲位移随温升比变化的分叉图。如图 8 所示,根据极限环幅

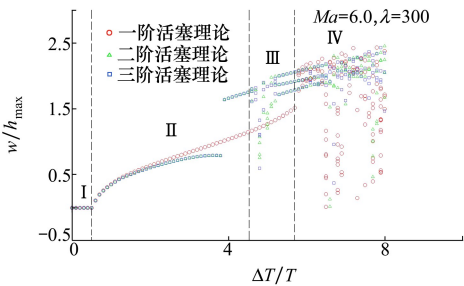


图 8 不同活塞理论下  $\bar{x}=0.75$  处位移随温升比变化的分叉图 ( $Ma=6$ )

表 7 不同活塞理论在不同温升比阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma=6$ )

| 温升比                     | 一阶          | 二阶          | 三阶          |
|-------------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\Delta T/T<0.5$        | 平壁板状态       | 平壁板状态       | 平壁板状态       |
| $0.5\leq\Delta T/T<4.5$ | 单周期极限环      | 单周期极限环      | 单周期极限环      |
| $4.5\leq\Delta T/T<5.7$ | 单周期极限环      | 多周期极限环      | 多周期极限环      |
| $\Delta T/T\geq 5.7$    | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动 |

3.2.4  $Ma=8.0$  状态

图 9 为  $Ma=8.0$  不同活塞理论下无量纲位移随温升比变化分叉图。如图 9 所示,随着温升比的增加,一阶、二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应在不同温升比阶段呈现出不同的差异性。为了细致分析影响规律随温升比的变化,根据极限环幅值随温升比的变化特征,将整个温升比范围划分为 10 个阶段。

论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着温升比的增加而增大。二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为多周期极限环振动。

值随温升比的变化特征,将整个温升比范围划分为 4 个阶段。

如表 7 所示,在  $Ma=6.0$  时,阶段 I, II, IV 分别与前述  $Ma=4.0$  时阶段 I, II, IV 的规律相同,因此,在此不再赘述。

阶段Ⅲ,当 $4.5\leq\Delta T/T<5.7$ 时,二阶、三阶活塞理论计算结果差异极小,一阶活塞理论与二阶、三阶活塞理论壁板动态响应特征的计算结果出现本质上的差异。一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤振幅值随着动压的增加而增大。二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为多周期极限环振动,但在 $4.5\leq\Delta T/T<5.2$ 时,壁板响应峰值点较为发散。

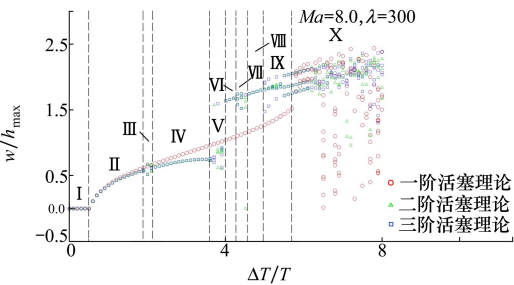


图 9 不同活塞理论下  $\bar{x}=0.75$  处位移随温升比变化的分叉图 ( $Ma=8$ )

如表 8 所示,在  $Ma = 8.0$  时,阶段 I , X 分别与前述  $Ma = 2.0$  时阶段 I , IV 的规律相同,阶段 II , IV , VI , VIII 与前述  $Ma = 2.0$  时阶段 II 规律相同,阶段 VII , IX 与前述  $Ma = 4.0$  时阶段 III 规律相同,因此,不再赘述。

1) 阶段 III ,当  $2.0 \leq \Delta T/T < 2.2$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,且颤

振幅值随着动压的增加而增大。二、三阶活塞理论下壁板动态响应表现为二周期极限环振动。

2) 阶段 V ,当  $3.5 \leq \Delta T/T < 3.9$  时,一阶活塞理论下,壁板动态响应表现为单周期极限环振动,颤振幅值随着动压的增加而增大。二阶、三阶活塞理论下壁板动态响应表现较为复杂:包含单周期极限环振动和多周期极限环振动。

表 8 不同活塞理论在不同温升比阶段下的壁板动力学特性对比 ( $Ma = 8$ )

| 温升比                         | 一阶          | 二阶            | 三阶            |
|-----------------------------|-------------|---------------|---------------|
| $\Delta T/T < 0.5$          | 平壁板状态       | 平壁板状态         | 平壁板状态         |
| $0.5 \leq \Delta T/T < 2.0$ | 单周期极限环      | 单周期极限环        | 单周期极限环        |
| $2.0 \leq \Delta T/T < 2.2$ | 单周期极限环      | 二周期极限环        | 二周期极限环        |
| $2.2 \leq \Delta T/T < 3.5$ | 单周期极限环      | 单周期极限环        | 单周期极限环        |
| $3.5 \leq \Delta T/T < 3.9$ | 单周期极限环      | 单周期极限环或多周期极限环 | 单周期极限环或多周期极限环 |
| $3.9 \leq \Delta T/T < 4.2$ | 单周期极限环      | 单周期极限环        | 单周期极限环        |
| $4.2 \leq \Delta T/T < 4.4$ | 单周期极限环      | 多周期极限环        | 多周期极限环        |
| $4.4 \leq \Delta T/T < 5.0$ | 单周期极限环      | 单周期极限环        | 单周期极限环        |
| $5.0 \leq \Delta T/T < 5.7$ | 单周期极限环      | 多周期极限环        | 多周期极限环        |
| $\Delta T/T \geq 5.7$       | 多周期极限环或混沌运动 | 多周期极限环或混沌运动   | 多周期极限环或混沌运动   |

4 结 论

本文采用四阶龙格-库塔法对一、二、三阶活塞理论下的二维简支壁板颤振方程进行数值模拟,针对活塞理论非线性项对壁板颤振的影响规律开展研究。根据数值模拟结果,分析得出以下主要结论:

1) 小温升比下,随着动压的变化,高阶活塞理论相比一阶活塞理论的结果表现出更复杂的动力学现象。一阶活塞理论计算的结果,壁板响应仅表现为收敛运动和单周期极限环颤振。而高阶活塞理论计算的结果除上述特征外,还存在多周期极限环颤振和混沌运动等更复杂的非线性动力学现象。

2) 随着马赫数增加,一阶和高阶活塞理论下的壁板动态响应出现显著差异时所需的动压和温升比逐渐减小,从  $Ma = 2$  时,  $\lambda = 1041$  和  $\Delta T/T = 4.7$  到  $Ma = 8$  时,大幅减小为  $\lambda = 288$  和  $\Delta T/T = 2.0$ 。

3)  $Ma = 6, 1\ 017 \leq \lambda < 1\ 095, 1\ 194 \leq \lambda < 1\ 248$  和  $Ma = 8, 1\ 011 \leq \lambda < 1\ 164, 1\ 191 \leq \lambda < 1\ 290$  或高温升比下,二、三阶活塞理论计算结果出现显著差异。

4) 在壁板动态响应一致时,高阶活塞理论计算的响应峰值通常小于一阶活塞理论计算结果,最大误差处位于  $Ma = 8, \lambda \geq 1\ 290$ , 约为 16.66%。随着温升比的变化,高阶活塞理论相比一阶活塞理论计算的结果,更早进入多周期极限环颤振,随后进入混沌运动。同时随着马赫数增大,高阶活塞理论计算的混沌状态逐渐转化为多周期极限环颤振。

综上所述,本文细致研究了活塞理论非线性项对简支壁板颤振的影响规律,发现二、三阶活塞理论非线性项对壁板颤振会产生较大的影响,在较高马赫数下,其影响更明显。由上述结论,可根据不同来流条件选择合适的活塞理论开展研究,这对壁板颤振的实际工程应用具有一定的参考价值。

## 参考文献:

- [1] 杨智春, 夏巍. 壁板颤振的分析模型、数值求解方法和研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(1): 81-98  
YANG Zhichun, XIA Wei. Analytical models, numerical solutions and advances in the study of panel flutter[J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(1): 81-98 (in Chinese)
- [2] 杨智春, 夏巍. 超声速气流中二维壁板的非线性热颤振响应分析[J]. 振动工程学报, 2009, 22(3): 221-226  
YANG Zhichun, XIA Wei. Nonlinear thermal flutter response of two dimensional panels in supersonic flow[J]. Journal of Vibration Engineering, 2009, 22(3): 221-226 (in Chinese)
- [3] DOWELL E H. Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells[J]. AIAA Journal, 1970, 8(3): 385-399
- [4] GRAY J C, MEI C. Large-amplitude finite element flutter analysis of composite panels in hypersonic flow[J]. AIAA Journal, 1993, 31(6): 1090-1099
- [5] CHENG G F, MEI C. Finite element modal formulation for hypersonic panel flutter analysis with thermal effects[J]. AIAA Journal, 2004, 42(4): 687-696
- [6] MCINTOSH S C. Effect of hypersonic nonlinear aerodynamic loading on panel flutter[J]. AIAA Journal, 1973, 11(1): 29-32
- [7] EASTEP F E, MCINTOSH S C. Analysis of nonlinear panel flutter and response under random excitation or non-linear aerodynamic loading[J]. AIAA Journal, 1971, 9(3): 411-418
- [8] 陈大林, 吴连军, 钟卫洲. 考虑气动力非线性时二维受热壁板的颤振分析[J]. 工程力学, 2011, 28(12): 226-230  
CHEN Dalin, WU LianJun, ZHONG Weizhou. Flutter analysis of two dimensional heated panels considering nonlinear aerodynamic[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(12): 226-230 (in Chinese)
- [9] 杨智春, 周建, 谷迎松. 超声速气流中受热曲壁板的非线性颤振特性[J]. 力学学报, 2012, 44(1): 30-38  
YANG Zhichun, ZHOU Jian, GU Yingsong. Nonlinear thermal flutter of heated curved panels insupersonic air flow[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(1): 30-38 (in Chinese)
- [10] ZHU Y C, YAO G F, WANG M, et al. A new pre-stretching method to increase critical flutter dynamic pressure of heated panel in supersonic airflow[J]. Mathematics. 2022, 10(23): 4506
- [11] 刘成, 叶正寅. 超声速物面振动气动力的非线性效应研究[J]. 空气动力学学报, 2018, 36(6): 1027-1033  
LIU Cheng, YE Zhengyin. Aerodynamic nonlinearity for surface vibration in supersonic flow[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2018, 36(6): 1027-1033 (in Chinese)
- [12] MENG X Z, YE Z Y, LIU C. Nonlinear analysis on piston theory[J]. AIAA Journal, 2019, 57(10): 4583-4587
- [13] MENG X Z, YE Z Y, LIU C. Aerodynamic nonlinearity of piston theory in surface vibration[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2020, 33(4): 4020035
- [14] DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate[J]. AIAA Journal, 1966, 4(7): 1267-1275
- [15] 夏巍, 杨智春. 超声速气流中受热壁板的稳定性分析[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 602-609  
XIA Wei, YANG Zhichun. Stability analysis of heated panels in supersonic air flow[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(5): 602-609 (in Chinese)
- [16] DUGUNDJI J, DOWELL E H, PERKIN B. Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations[J]. AIAA Journal, 1963, 1(5): 1146-1154
- [17] BOLOTIN V V, PETROVSKY A V. Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic non-linear system in the divergence domain[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 191(3): 431-451

# Effect of nonlinear terms in piston theory on characteristics of panel flutter

LUO Yuxiao, YE Kun, YE Zhengyin

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Currently, there is no systematic summary of the influence of the nonlinear terms in piston theory on the panel flutter. The two-dimensional nonlinear panel flutter equations under supersonic airflow based on the first, second, and third-order piston theories is established. The stability of the heated panel is analyzed by using the Lyapunov's indirect method, and the panel flutter equations are numerically solved based on the numerical analysis method to investigate the influence of the nonlinear terms in piston theory on the panel flutter. The results show that: ①Under a small temperature rise ratio, the panel response under the first-order piston theory only exhibits the convergent motion and single-period limit cycle flutter. While under higher-order piston theories, the panel response is more complex, exhibiting more complex nonlinear dynamic phenomena such as multi-period limit cycle flutter and chaotic motion in addition to the aforementioned characteristics. ②As the Mach number increases, the required dynamic pressure and temperature rise ratio decrease gradually when the dynamic response of the panel under the first-order piston theory and higher-order piston theories exhibit significant differences. ③The significant differences in the computational results of the second-order and third-order piston theory appear under the high Mach numbers and relatively high dynamic pressures, and the same phenomenon occurs under the high temperature rise ratios. ④When the dynamic response characteristics of the panel are basically consistent, the displacement response peak calculated by using the higher-order piston theory is usually smaller than the result calculated by using the first-order piston theory, and the maximum error can reach about 16.66%. The present results have certain reference value for selecting the appropriate analysis method for the panel flutter under different conditions in practical applications.

**Keywords:** piston theory; stability; panel flutter; numerical simulation

**引用格式:** 骆雨潇, 叶坤, 叶正寅. 活塞理论非线性项对壁板颤振特性的影响研究[J]. 西北工业大学学报, 2024, 42(4): 577-587

LUO Yuxiao, YE Kun, YE Zhengyin. Effect of nonlinear terms in piston theory on characteristics of panel flutter[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2024, 42(4): 577-587 (in Chinese)