

# 静水压力下纤维缠绕圆柱壳体的稳定性分析

沈克纯, 潘光, 姜军, 黄桥高, 施瑶

(1.西北工业大学 航海学院, 陕西 西安 710072;  
2.西北工业大学 无人水下运载技术重点实验室, 陕西 西安 710072)

**摘要:**为更清楚地认识静水压力作用下纤维缠绕圆柱壳体的耐压特性、解决深海耐压舱体的结构稳定性问题以及给工程设计提供参考,有必要对纤维缠绕圆柱壳体的结构稳定性进行深入研究。在弹性薄壳理论的基础上,推导出纤维缠绕圆柱壳体稳定性控制方程,采用 Galerkin 方法求解纤维缠绕圆柱壳体受静水压力作用下的临界失稳载荷。以正交缠绕、金属-纤维缠绕复合结构、斜交缠绕等几种形式的壳体结构为对象进行解析,并与实验结果对比,验证了求解的有效性和正确性。在此基础上,建立了基于遗传算法与解析方案一体式的优化平台,对  $[(\pm\theta)_{12}]$ ,  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  及  $[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm\theta_3)_4]$  缠绕形式的圆柱壳体进行优化设计,研究纤维缠绕角度、对应层数及设计变量个数对临界失稳载荷的影响。结果表明,纤维缠绕角度对临界失稳载荷有显著影响,通过数值优化稳定性分别提高 31.31%、43.25%及 57.17%;随着角度变量的增加,优化得到的临界失稳载荷越大,最优可提高 57.17%。

**关键词:**静水压力;纤维缠绕;圆柱壳体;稳定性;临界失稳载荷

**中图分类号:**U663.43

**文献标志码:**A

**文章编号:**1000-2758(2018)05-0839-09

潜航器是开发海洋资源与巩固海防的重要装备,耐压壳体的结构稳定性是潜航器设备正常工作和人员安全的重要保证,同时也是深海潜航器研发的关键技术之一<sup>[1-2]</sup>。随着人类向深海探索步伐的加快,对潜航器的搭载能力有了更高要求,因此,潜航器应具备较大的储备浮力。纤维复合材料是一种新型的结构耐压材料,具有比强度大、比刚度高、可设计等特点,能够减轻结构重量、提供正浮力、增加负载能力;耐腐蚀、吸波和无磁性等特点对潜航器的寿命周期和反侦察能力具有重要意义<sup>[3]</sup>。

已有学者对纤维缠绕圆柱壳体的耐压稳定性开展了研究。王珂晟<sup>[4]</sup>运用混合遗传算法求解屈曲特征方程,分析了纤维缠绕航天飞行器等壳体结构在轴压作用下稳定性问题。李志敏<sup>[5]</sup>将壳体屈曲的边界层理论推广运用到外压作用下中等厚度各向异性圆柱壳稳定性分析中,研究了铺层方式对外压屈曲临界载荷的影响。Messarier 等<sup>[6-7]</sup>通过数值模

拟分析了铺层顺序对结构临界载荷的影响。Lopatin 等<sup>[8-9]</sup>对外压作用下两端简支、固支等边界条件下特定铺层方式的圆柱壳体的失稳载荷进行求解,并做了数值验证。

以上学者根据特定受力状态、边界条件对复合材料壳体稳定性的进行研究。随着复合材料技术的发展,壳体多角度纤维缠绕成型技术已经成熟,在水下耐压壳体结构上已有应用,有必要提出一种适用于求解静水压力作用下纤维缠绕圆柱壳体稳定性的解析方法。本文推导出纤维缠绕圆柱壳体稳定性控制方程,采用 Galerkin 方法对特征方程进行求解,推广到正交缠绕、金属-纤维缠绕复合结构、斜交缠绕等壳体结构临界失稳载荷的求解。通过建立遗传算法与解析方案的数字接口,搭建了纤维缠绕圆柱壳体结构稳定性优化平台,研究了纤维缠绕角度、设计变量个数对临界失稳载荷的影响。

收稿日期:2017-09-09

基金项目:国家自然科学基金(51479170,51879220,61803306)与国家重点研发计划(2016YFC0301300)资助

作者简介:沈克纯(1987—),西北工业大学博士研究生,主要从事水下耐压壳体结构强度、稳定性研究。

### 1 稳定性控制方程的建立

受静水压力作用的圆柱壳体,当压力达到某临界值,壳体由静力平衡状态变为临界失稳状态,壳体在 2 种相邻状态之间的变化产生位移,位移引起附加载荷,在附加载荷的作用下,圆柱壳体处于临界失稳状态,若对此平衡状态给予任一微小扰动,则壳体丧失稳定性。

#### 1.1 平衡方程

如图 1 所示,长为  $L$ ,厚为  $t$ ,中面半径为  $R$  的圆柱壳体,在静水压力  $p$  作用下,根据单元体的受力,其平衡方程为

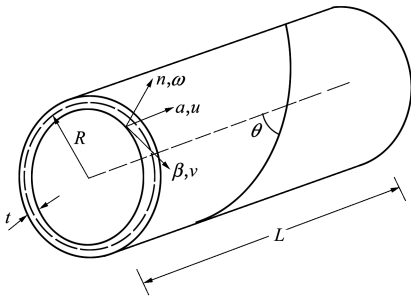


图 1 复合材料圆柱壳体

$$R \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + F_\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} - \left( \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} \right) + R \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + F_\beta = 0 \tag{2}$$

$$2 \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} + R \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + N_\beta - F_n = 0 \tag{3}$$

式中,  $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$  为圆柱壳体的薄膜内力,  $M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$  为弯曲内力矩,  $F_\alpha, F_\beta, F_n$  是附加载荷,可表示为

$$F_\alpha = -pR \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + PR \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{T}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \tag{4}$$

$$F_\beta = -p \left( \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - v \right) + PR \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{T}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - v \right) \tag{5}$$

$$F_n = pR \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{R \partial \beta} + \frac{\omega}{R} \right) + PR \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{T}{R} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \beta} - \omega \right) \tag{6}$$

式中,  $P$  为圆柱壳体所受轴向力,  $T$  为径向力。  $u, v,$

$\omega$  是外载荷作用下圆柱壳体从初始压缩状态到临界失稳状态在  $\alpha, \beta, n$  方向上的位移。

#### 1.2 几何变形关系

由曲面微分几何关系可知,  $u, v, \omega$  等位移引起中面的伸长和剪切变形

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [\Gamma_\varepsilon] \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} k_\alpha \\ k_\beta \\ k_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [\Gamma_k] \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ 0 & -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \tag{8}$$

式中,  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  和  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  是壳体中面应变,  $k_\alpha, k_\beta, k_{\alpha\beta}$  为中面曲率及扭率,  $\Gamma_\varepsilon$  和  $\Gamma_k$  是位移  $u, v, \omega$  引起中面上应变和扭率的系数。

#### 1.3 本构关系

由经典层合理理论的内力-变形关系可得

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta} \\ M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \\ k_\alpha \\ k_\beta \\ k_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$A_{ij}$  为面内刚度,表示中面应变与薄膜内力的刚度关系,  $B_{ij}$  耦合刚度,表示弯曲与拉伸的耦合关系,  $D_{ij}$  弯曲刚度,表示弯曲内力矩与曲率、扭率的刚度关系,其中  $i, j = 1, 2, 6$ 。各刚度的表达式为

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k - z_{k-1})$$
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$
$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{10}$$

$z_k$  表示纤维复合材料第  $k$  层到壳体中面的距离。  $Q_{ij}^k (i, j = 1, 2, 6)$  表示第  $k$  层的偏轴刚度,对于

任意第  $k$  层纤维层,其偏轴刚度  $Q_{ij}^k$  可由该纤维层的缠绕角度  $\theta$  及模量分量  $(Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy}, Q_{ss})$  表示:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3 - c^3s & 2(cs^3 - c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s - cs^3 & 2(c^3s - cs^3) \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中,  $c = \cos\theta, s = \sin\theta$ , 各模量分量可由材料的性能参数表示如下

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= E_{11}/(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \\ Q_{yy} &= E_{22}/(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \\ Q_{xy} &= E_{11}\nu_{LT}/(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \\ Q_{ss} &= G_{12} \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $E_{11}$  和  $E_{22}$  分别表示纤维纵向弹性模量和横向弹性模量;  $\nu_{LT}$  和  $\nu_{TL}$  分别表示横向泊松比和纵向泊松比;  $G_{12}$  表示面内剪切弹性模量。

### 1.4 稳定性控制方程的建立

将几何变形关系式((7),(8)式)带入本构方程(9)得到薄膜内力  $(N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta})$  和弯曲内力矩  $(M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta})$  的表达式,然后将其与附加力表达(4)~(6)式带入平衡方程(1)~(3)中,得到稳定性控制方程

$$\begin{aligned} (A_{11}R + PR) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \left( \frac{A_{66}}{R} + \frac{T}{R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \\ \left( A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} - \frac{2B_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{11}R \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3} - \\ \left( \frac{B_{12}}{R} + \frac{2B_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \beta^2} + (A_{12} - pR) \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0 \quad (13) \\ \left( A_{12} + A_{66} - \frac{B_{12}}{R} - \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ \left( A_{66}R - 3B_{66} + \frac{2D_{66}}{R} + PR \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \\ \left( \frac{A_{22}}{R} - \frac{D_{22}}{R^3} + \frac{T}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \left( p - \frac{T}{R} \right) v - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( B_{12} + 2B_{66} - \frac{D_{12}}{R} - \frac{2D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \\ \left( \frac{B_{22}}{R^2} - \frac{D_{22}}{R^3} \right) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \beta^3} + \left( \frac{A_{22}}{R} - \frac{B_{22}}{R^2} - p + \frac{2T}{R} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B_{11}R \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + \left( \frac{2B_{66}}{R} + \frac{B_{12}}{R} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2} + (A_{12} - pR) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \\ \left( B_{12} + 2B_{66} + \frac{D_{12}}{R} - \frac{4D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \\ \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \beta^3} + \left( \frac{A_{22}}{R} + \frac{B_{22}}{R^2} - p + \frac{2T}{R} \right) \frac{\partial v}{\partial \beta} - \\ D_{11}R \frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^4} - \left( \frac{2D_{12}}{R} + \frac{4D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - D_{22} \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \beta^4} - \\ PR \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - \frac{T}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} - \left( p - A_{22} \frac{1}{R} - \frac{T}{R} \right) \omega = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

## 2 稳定性方程求解

### 2.1 Galerkin 方法

本文选用 Galerkin 方法求解临界失稳压力,其基本思想如下:对于任一给定的微分方程  $L(u) = 0$ ,边界条件为  $S(u) = 0$ ,若其解域为  $U$ ,假定存在一个满足边界条件的近似解域  $u_a$

$$u_a = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \quad (16)$$

式中,  $a_j$  为待定系数,  $\phi_j$  为基底函数。将近似解域  $u_a$  带入微分方程  $L(u)$ ,则  $L(u_a)$  与  $L(u)$  之间存在残差  $R_a$ ,残差在解域  $U$  上加权后之和为 0,又称为正交化条件,即

$$(R_a, \phi_j) = \sum_{j=1}^n a_j (L(\phi_j), \phi_j) = 0 \quad (17)$$

方程(17)是与待定系数  $a_j$  有关的齐次线性方程组,若使  $a_j$  有非零解,令特征方程等于零,可求解微分方程  $L(u) = 0$  中的其他未知量;若方程(17)中的唯一未知量为  $a_j$ ,求解即可得到微分方程  $L(u) = 0$  的近似解  $u_a$ 。本文主要运用 Galerkin 方法求解圆柱壳体的临界失稳压力,即求解微分方程  $L(u) = 0$  中的临界失稳压力。

### 2.2 特征方程的建立及求解

首先选取的逼近函数须满足边界条件,复合材料圆柱壳体的两端通过裙边与金属封头连接,圆柱段的两端简化为简支边界,另外,壳体所处的应力状态由一个基本应力状态和一个边界应力状态叠加而

成,基本应力状态遍布于壳体全域,而边界效应主要存在于边界附件的局部范围内。假设壳体长度  $L \geq 2R$ ,使得在分析结构屈曲时可以忽略弯曲边界效应的影响,因此,壳体所处的应力状态被认为是薄膜状态,故约束如下

$$\begin{aligned} v|_{\alpha=0,L} &= 0 \\ \omega|_{\alpha=0,L} &= 0 \\ N_\alpha|_{\alpha=0,L} &= 0 \\ M_\alpha|_{\alpha=0,L} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

选取近似函数为

$$\begin{cases} u(\alpha, \beta) = U \cos \lambda \alpha \cos n \beta \\ v(\alpha, \beta) = V \sin \lambda \alpha \sin n \beta \\ \omega(\alpha, \beta) = W \sin \lambda \alpha \cos n \beta \end{cases} \quad (19)$$

式中,  $\lambda = m\pi R/L$ ,  $U, V$  和  $W$  是常数,  $m$  和  $n$  是表征圆柱壳体失稳时沿轴向、周向呈现半波数,把近似函数带入边界约束(18)式中,得

$$\begin{aligned} v|_{\alpha=0,L} &= 0 \\ \omega|_{\alpha=0,L} &= 0 \\ N_\alpha|_{\alpha=0,L} &= -\frac{nA_{16}}{R} U \cos \frac{\lambda \alpha}{R} \sin n \beta - \\ &\quad \frac{2n\lambda B_{16}}{R^2} W \cos \frac{\lambda \alpha}{R} \sin n \beta \\ M_\alpha|_{\alpha=0,L} &= -\frac{nB_{16}}{R} U \cos \frac{\lambda \alpha}{R} \sin n \beta - \\ &\quad \frac{2n\lambda D_{16}}{R^2} W \cos \frac{\lambda \alpha}{R} \sin n \beta \end{aligned} \quad (20)$$

纤维缠绕时相邻 2 层缠绕角度呈正负交错,当  $ij = 16, 26$  时,面内刚度  $A_{ij}$ 、耦合刚度  $B_{ij}$  及弯曲刚度  $D_{ij}$  相比  $ij$  其他项是微小量,在分析壳体屈曲问题时可以简化为零。可知,  $N_\alpha = M_\alpha = 0$ ,故近似函数(19)满足(18)式中的全部边界条件。

将近似函数(19)带入稳定性控制方程(13)~(15)中,近似解产生残差  $R_\alpha, R_\beta, R_n$  为

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \left\{ \left[ \frac{-(A_{11} + P)\lambda^2}{R} - \frac{(A_{66} + T)n^2}{R} \right] U + \right. \\ &\quad \left( A_{12} + \frac{B_{12}}{R} + A_{66} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda}{R} V + \\ &\quad \left[ \frac{\lambda^3 B_{11}}{R^2} + \frac{(B_{12} + 2B_{66})n^2 \lambda}{R^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(A_{12} - pR)\lambda}{R} \right] W \left. \right\} \cos n \beta \cos \frac{\lambda \alpha}{R} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} R_\beta &= \left\{ \left( A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda}{R} U + \right. \\ &\quad \left[ - \left( PR + RA_{66} + 2B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \right) \frac{\lambda^2}{R^2} - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{A_{22}}{R} + \frac{2B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} + \frac{T}{R} \right) n^2 + \left( p - \frac{T}{R} \right) \right] V + \\ &\quad \left[ - \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} \right) n^3 - \right. \\ &\quad \left. \left( B_{12} + \frac{2D_{66}}{R} + \frac{D_{12}}{R} + 2B_{66} \right) \frac{n\lambda^2}{R^2} - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{A_{22}}{R} - p + \frac{2T}{R} \right) n \right] W \left. \right\} \sin n \beta \sin \frac{\lambda \alpha}{R} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R_n &= \left\{ \left[ \frac{B_{11}\lambda^3}{R^2} + \frac{(2B_{66} + B_{12})n^2 \lambda}{R^2} + \frac{(A_{12} - pR)\lambda}{R} \right] U + \right. \\ &\quad \left[ - \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} \right) n^3 - \right. \\ &\quad \left. \left( B_{12} + \frac{D_{12}}{R} + 2B_{66} + \frac{2D_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda^2}{R^2} - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{A_{22}}{R} + \frac{B_{22}}{R^2} - p + \frac{2T}{R} \right) n \right] V - \\ &\quad \left[ \frac{D_{11}\lambda^4}{R^3} + (4D_{66} + 2D_{12}) \frac{n^2 \lambda^2}{R^3} + \frac{D_{22}n^4}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. (2B_{12} + PR) \frac{\lambda^2}{R^2} + \left( \frac{2B_{22}}{R^2} + \frac{T}{R} \right) n^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{A_{22}}{R} + \frac{T}{R} - p \right) \right] W \left. \right\} \cos n \beta \sin \frac{\lambda \alpha}{R} \end{aligned} \quad (23)$$

根据正交化条件,得到关于  $U, V, W$  的齐次线性方程组:

$$\begin{aligned} c_{11}U + c_{12}V + c_{13}W &= 0 \\ c_{21}U + c_{22}V + c_{23}W &= 0 \\ c_{31}U + c_{32}V + c_{33}W &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

欲使  $U, V, W$  存在非零解,则特征方程为零,即

$$f(m, n, p) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} c_{11} &= - (A_{11} + P) \frac{\lambda^2}{R} - (A_{66} + T) \frac{n^2}{R} \\ c_{12} &= \left( A_{12} + \frac{B_{12}}{R} + A_{66} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda}{R} \end{aligned}$$

$$c_{13} = B_{11} \frac{\lambda^3}{R^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{n^2 \lambda}{R^2} + (A_{12} - pR) \frac{\lambda}{R}$$

$$c_{21} = \left( A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda}{R}$$

$$c_{22} = - \left( PR + RA_{66} + 2B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \right) \frac{\lambda^2}{R^2} - \left( \frac{A_{22}}{R} + \frac{2B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} + \frac{T}{R} \right) n^2 + \left( p - \frac{T}{R} \right)$$

$$c_{23} = - \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} \right) n^3 - \left( B_{12} + \frac{2D_{66}}{R} + \frac{D_{12}}{R} + 2B_{66} \right) \frac{n\lambda^2}{R^2} - \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{A_{22}}{R} - p + \frac{2T}{R} \right) n$$

$$c_{31} = \frac{\lambda^3 B_{11}}{R^2} + (2B_{66} + B_{12}) \frac{n^2 \lambda}{R^2} - (-A_{12} + pR) \frac{\lambda}{R}$$

$$c_{32} = - \left( \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^3} \right) n^3 - \left( B_{12} + \frac{D_{12}}{R} + 2B_{66} + \frac{2D_{66}}{R} \right) \frac{n\lambda^2}{R^2} + \left( -\frac{A_{22}}{R} - \frac{B_{22}}{R^2} + p - \frac{2T}{R} \right) n$$

$$c_{33} = - \frac{D_{11} \lambda^4}{R^3} + (-4D_{66} - 2D_{12}) \frac{n^2 \lambda^2}{R^3} - \frac{n^4 D_{22}}{R^3} - (2B_{12} + PR) \frac{\lambda^2}{R^2} - \left( \frac{2B_{22}}{R^2} + \frac{T}{R} \right) n^2 + \left( -\frac{1A_{22}}{R} - \frac{T}{R} + p \right)$$

圆柱壳体受均匀外压  $p$  作用,有  $P = pR/2, T = 2P$ 。在给定圆柱壳体几何参数及材料性能参数的情况下,仅有  $m, n$  是未知量,对特定  $m$  和  $n$  有对应  $p$  存在,其中的最小值即为临界失稳载荷  $p_{cr}$ 。

### 3 验证与优化

本节将通过算例,对方程(25)进行求解,以验证本文解析解的有效性和正确性。所选算例有正交缠绕、金属-纤维缠绕复合结构、斜交缠绕等几种形式。求解时,单层厚度根据壳体实测厚度与纤维层数平均后得到,假设不存在材料缺陷和结构几何缺陷。

表 1 USN125 性能参数

名称	符号	值	单位
弹性模量	$E_{11}$	162	GPa
	$E_{22}$	9.6	GPa
泊松比	$\nu_{LR}$	0.298	
	$\nu_{TL}$	0.47	
剪切模量	$G_{12}$	6.1	GPa

#### 3.1 正交缠绕壳体的失稳验证

正交缠绕是指纤维层由  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层依次交错缠绕而成,正交缠绕圆柱壳体具有典型的正交异性,应用广泛,本文对文献[10]中  $[0/90]_{12}$  缠绕的圆柱壳体进行计算,材料的力学性能参数如表 1 所示,表 2 给出结构几何尺寸、实验值及本文计算结果,由本文计算失稳载荷与实验测试结果对比可知,平均误差为 5.90%,具有良好的精度。

表 2 实验结果<sup>[10]</sup>与本文解

编号	$R_{inner}/$ mm	$t/$ mm	$L/$ mm	$P_{cr}/\text{MPa}$		误差/%
				实验	本文解 ( $m, n$ )	
1		2.69	600	0.55	0.5249(1, 3)	4.57
2	158	2.68	600	0.55	0.5205(1, 3)	5.37
3		2.65	600	0.55	0.5074(1, 3)	7.75
平均						5.90

#### 3.2 金属-纤维复合结构的失稳验证

金属-纤维复合结构是指以薄壁金属壳体作为内衬,在薄壁金属壳体的外表面缠绕复合材料纤维,该结构能够大幅提高压力容器的承载能力,此种结构形式常用于承内压容器的设计。随着大深度潜航器的研发,已有学者<sup>[11]</sup>将此种形式应用于承受静水压力的壳体结构上,在满足强度要求下,该结构形式具有很好的减重效果。文献[11]在铝合金薄壁的外表面缠绕碳纤维复合材料,并在静水外压作用下对其临界失稳载荷进行了实验研究,材料为 T700-12K 复合材料(总厚 3.1 mm),缠绕参数为  $[\pm 65]_5$ ,金属内胆为 2124 Al(壁厚 0.75 mm),材料的性能参数如表 3 所示。

表 3 T700-12K 和 2124 Al 性能参数

名称	T700-12K		2124 Al		单位
	符号	值	符号	值	
弹性模量	$E_{11}$	90	$E$	68	GPa
	$E_{22}$	7			GPa
泊松比	$\nu_{LR}$	0.33	$\nu$	0.34	
	$\nu_{TL}$	0.33			
剪切模量	$G_{12}$	5	$G$	27	GPa





### 4 纤维缠绕圆柱壳体稳定性优化

为研究纤维缠绕角度、缠绕层数及缠绕顺序对临界失稳载荷的影响,按照表 5 的材料性能参数和表 6 中 FWT601 几何尺寸,分别以  $[(\pm\theta)_{12}]$ 、 $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  及  $[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm\theta_3)_4]$  缠绕方式为模型,对其结构稳定性进行优化,设计变量为  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \Delta\theta = 5^\circ$ ) 及  $x$  ( $1 \leq x \leq 11, \Delta x = 1$ ),目标函数为临界失稳载荷  $p_{cr}$ 。如图 2 所示,通过建立遗传算法与 Galerkin 解析方案的数字接口,搭建了纤维缠绕圆柱壳体稳定性优化设计平台,优化流程如下:①定义初始种群,通过遗传算法生成纤维缠绕初始参数;②建立遗传算法与解析方案的数字接口,把初始种群参数传递给解析方案;③求解临界失稳压力,通过 Galerkin 方法求解特征方程;④收敛判断,并通过杂交变异生成新种群;⑤重复以上步

骤,直至收敛。

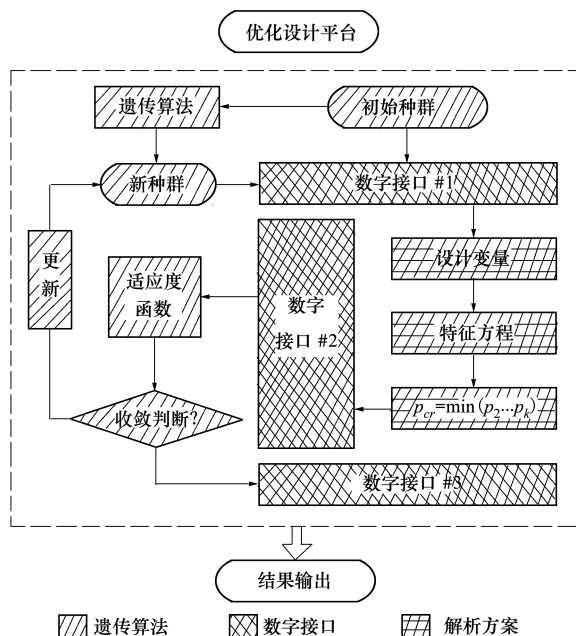


图 2 优化设计平台

表 7 数值优化结果

缠绕类型	优化结果	$P_{cr}/\text{MPa}$	$(m, n)$	增幅%
$[(\pm\theta)_{12}]$	$[(\pm 75)_{12}]$	9.428	(1, 3)	31.31
$[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$	$[(\pm 90)_2/(\pm 75)_{10}]$	10.285	(1, 3)	43.25
$[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm\theta_3)_4]$	$[(\pm 90)_4/(\pm 30)_4/(\pm 90)_4]$	11.285	(1, 3)	57.17

表 7 给出了 3 种缠绕形式的稳定性优化结果。结果表明,随着设计变量的增多,壳体结构稳定性增强,增幅越大,与初始值 7.418 MPa (对应 FWT601 临界失稳载荷) 比较,  $[(\pm\theta)_{12}]$ ,  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  及  $[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm\theta_3)_4]$  3 种缠绕形式的壳体临界失稳载荷分别提高了 31.31%、43.25% 及 57.17%。图 3 给出  $[(\pm\theta)_{12}]$  缠绕形式壳体的临界失稳载荷曲线和失稳半波数,当  $\theta$  在  $[0, 75]$  范围内,临界失稳载荷逐渐增大,当  $\theta = 75^\circ$  时,失稳值达到最大为 9.428 MPa,比初始值提高 31.31%,此时的周向失稳半波数  $n = 3$ 。

图 4 和图 5 分别给出  $x = 2$  和  $x = 3$  时  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  缠绕方式中角度对临界失稳载荷影响趋势,从图中可以看出纤维缠绕角度对临界失稳载荷有较大影响。由图 4 ( $x = 2$ ) 可知,临界失稳载荷的梯度主要受  $\theta_2$  的变化,即随着  $\theta_2$  的增大,临界失稳载荷呈增大趋势,最后稍有降低。而  $\theta_1$  主要

影响梯度的疏密,当  $\theta_1 \leq 45^\circ$  时,梯度相对稀疏,当  $\theta_1 \geq 45^\circ$  时,梯度相对较密。由图 5 ( $x = 3$ ) 可知,临界失稳载荷的梯度主要受  $\theta_1$  的影响,即随着  $\theta_1$  的增大,临界失稳载荷逐渐增大,但是,当  $\theta_1 \leq 45^\circ$  且  $\theta_2 \leq 45^\circ$  时,临界失稳载荷的梯度受  $\theta_2$  的影响,即随着  $\theta_2$  的不同,临界失稳载荷发生变化。

综合分析图 4 和图 5 可知,纤维缠绕角度及其对应层数对壳体结构稳定性均有影响,当层数  $x$  发生变化,引起临界失稳载荷梯度的影响因素发生变化;由 1.3 节中方程式 (11) 可知,当纤维缠绕角度改变时,偏轴刚度发生变化,进而体现在方程式 (10) 中面内刚度、耦合刚度和弯曲刚度的改变,最终表现在特征方程 (25) 中,在求解特征方程时, $m$  和  $n$  是待定系数,分别表征壳体失稳时的轴向半波数和圆周半波数,不同的待定系数产生不同的解,其中最小解即为临界失稳载荷,此时对应的  $m$  值和  $n$  值即为结构失稳时的轴向半波数与圆周半波数,这是 Galerkin

方法求解特征方程的基本思想。对比 $[(\pm\theta)_{12}]$ 、 $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$ 及 $[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm$

$\theta_3)_4]$ 3种缠绕方式的优化结果可知,随着设计变量个数的增加,优化后壳体临界失稳载荷逐渐增大。

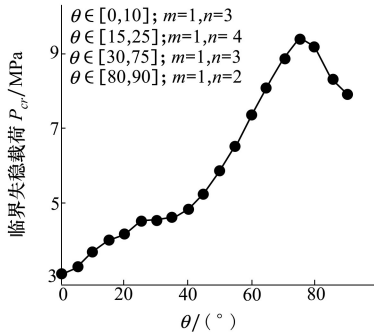


图 3  $[(\pm\theta)_{12}]$  临界失稳载荷

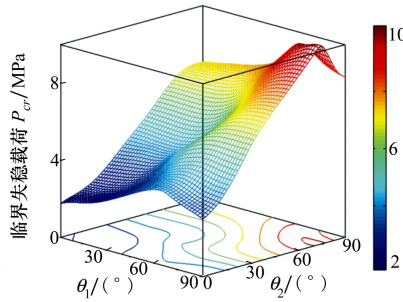


图 4  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  临界失稳载荷( $x = 2$ )

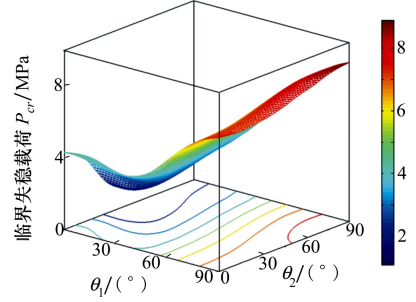


图 5  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  临界失稳载荷( $x = 3$ )

### 5 结 论

本文以纤维缠绕圆柱壳体为对象,从弹性薄壳理论分析入手,推导出纤维缠绕圆柱壳体稳定性控制方程,采用 Galerkin 方法得到特征方程,求解出临界失稳载荷。该解析方法适用于以任意形式缠绕的圆柱壳体结构的稳定性求解,并能表征结构失稳模

态,具有物理解释明晰的优点。搭建了纤维缠绕圆柱壳体结构稳定性优化平台,对不同缠绕形式的壳体稳定性进行数值优化,分析纤维缠绕角度、对应层数及设计变量个数对结构稳定性的影响,结果表明,纤维缠绕角度对临界失稳载荷影响显著,增加纤维缠绕角度变量,壳体结构承载能力明显增强,与初始值相比,文中的优化结果最大提高率达 57.17%。

### 参考文献:

[1] 徐伟哲,张庆勇. 全海深潜水器的技术现状和发展综述[J]. 中国造船, 2016, 57(2): 206-221  
 Xu Weizhe, Zhang Qingyong. Overview of Present Status and Development Trend of Full Ocean Depth Submersibles[J]. Shipbuilding of China, 2016, 57(2):206-221 (in Chinese)

[2] 李文跃,王帅,刘涛. 大深度载人潜水器耐压壳结构研究现状及最新进展[J]. 中国造船, 2016, 57(1): 210-221  
 Li Wenyue, Wang Shuai, Liu Tao. Current Status and Progress on Pressure Hull Structure of Manned Deep Submersible[J]. Shipbuilding of China, 2016, 57(1): 210-221 (in Chinese)

[3] Ross C T F. A Conceptual Design of an Underwater Vehicle[J]. Ocean Engineering, 2006, 33(16): 2087-2104

[4] 王珂晟. 复合材料圆柱壳稳定性分析及其新算法研究[D]. 长沙:中国人民解放军国防科学技术大学, 2002  
 Wang Kesheng. Study on Stability of Composite Cylindrical Shell and Its New Algorithm[D]. Changsha, National University of Defense Technology, 2002 (in Chinese)

[5] 李志敏. 船舶与海洋工程中复合材料圆柱壳结构屈曲和后屈曲行为研究[D]. 上海:上海交通大学, 2008  
 Li Zhimin. Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Cylindrical Shell Structures in Naval Architecture and Ocean Engineering[D]. Shanghai, Shanghai Jiaotong University, 2008 (in Chinese)

[6] Messenger T. Buckling of Imperfect Laminated Cylinders under Hydrostatic Pressure[J]. Composite Structures, 2001, 53(3): 301-307

[7] Messenger T, Pyrz M, Gineste B, et al. Optimal Laminations of Thin Underwater Composite Cylindrical Vessels[J]. Composite Structures, 2002, 58(4): 529-537

[8] Lopatin A V, Morozov E V. Buckling of the Composite Sandwich Cylindrical Shell with Clamped Ends under Uniform External Pressure[J]. Composite Structures, 2015, 122: 209-216



- [9] Lopatin A V, Morozov E V. Buckling of Composite Cylindrical Shells with Rigid End Disks under Hydrostatic Pressure[J]. Composite Structures, 2017, 173: 136-143
- [10] Hur S H, Son H J, Kweon J H, et al. Postbuckling of Composite Cylinders under External Hydrostatic Pressure[J]. Composite Structures, 2008, 86(1):114-124
- [11] Cai B, Liu Y, Liu Z, et al. Reliability-Based Load and Resistance Factor Design of Composite Pressure Vessel under External Hydrostatic Pressure[J]. Composite Structures, 2011, 93(11): 2844-2852
- [12] Moon C J, Kim I H, Choi B H, et al. Buckling of Filament-Wound Composite Cylinders Subjected to Hydrostatic Pressure for Underwater Vehicle Applications[J]. Composite Structures, 2010, 92(9):2241-2251

## Stability of Filament-Wound Composite Cylinders Subjected to Hydrostatic Pressure

Shen Kechun, Pan Guang, Jiang Jun, Huang Qiaogao, Shi Yao

(1.School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;  
2.Key Laboratory for Unmanned Underwater Vehicle, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** In order to know the mechanical properties of filament-wound composite cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure, solve the buckling problem of pressure hull in deep sea and provide reference for engineering design, it is necessary to research the stability of filament-wound composite cylindrical shells. Based on the theory of thin shells, the governing equations were derived. Stability of composite cylindrical shells was researched by employing Galerkin method to solve the eigenvalue equation. The critical buckling pressure was calculated for cross filament-wound, metal-filament-wound and angle filament-wound composite cylinders under hydrostatic pressure. Compared to the test results, the numerical solution was illustrated to be feasibility. On this basis, the numerical method was interacted with genetic algorithm to search optimum stacking sequence and filament winding angle. Three types of winding pattern  $[(\pm\theta)_{12}]$ ,  $[(\pm\theta_1)_x/(\pm\theta_2)_{12-x}]$  and  $[(\pm\theta_1)_4/(\pm\theta_2)_4/(\pm\theta_3)_4]$  were investigated,. Further, the effects of winding angle and the corresponding layer number on the critical buckling pressure were evaluated. It was shown that winding angle variation affected the critical buckling pressure significantly. Stability was greatly improved by numerical optimization, and the maximum critical buckling loads are increased by 31.31%, 43.25% and 57.51% compared with the base line, respectively. As the number of design variable increased, the carrying capacity was improved markedly. The optimal critical buckling pressure was increased by 57.17%.

**Keywords:** hydrostatic pressure; filament-wound; cylindrical shells; stability; critical buckling pressure