

含有时滞控制的准零刚度隔振器的隔振性能研究

李东海, 赵寿根, 何玉金, 李涛

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘要:采用一对斜置弹簧作为负刚度元件,与垂直弹簧并联组成准零刚度非线性隔振器,从而增大系统的隔振频率范围。并引入线性位移时滞控制。通过平均法分析得到系统在简谐力激励下的响应特性。在此基础上,研究了该刚度系统在引入线性位移时滞控制时的力传递特性,给出了时滞控制对力传递率的影响规律和特点。结果表明,无论受控系统是在低频段还是高频段,该隔振器的隔振性能均比等效的线性隔振器要好,而受控系统的隔振性能优于不受控系统。

关键词:准零刚度;隔振器;时滞控制;力传递率

中图分类号: TB123

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2018)06-1168-08

振动隔离是解决工程振动问题的重要手段。在目前大量的工程实际中,普遍采用线性隔振器。由线性隔振理论可知,当系统的激励频率与隔振器的固有频率之比大于1.414时才具有隔振性能。对于一些精密仪器而言,如航天器上的光学元件,低频振动对其精度影响更大。如采用线性隔振措施,势必会降低隔振器的刚度从而实现低频隔振。这也会造成隔振器的静态稳定性降低。理想的情况是隔振器具有较高的静态刚度来保证静态负载能力,并且具有较低的动态刚度来增大隔振频率范围。高静态刚度低动态刚度(high-static-low-dynamic-stiffness, HSLDS)特性可以通过非线性结构来实现^[1]。Ibrahim^[2]综述了非线性隔振器的发展,表明非线性隔振是一个十分活跃的领域。Liu等^[3]在其综述中也详细地阐述了非线性隔振器在微振动隔离领域的应用。Yang等^[4]研究了带有负刚度机构的非线性隔振系统的动力学行为。研究表明增加负刚度机构能极大地扩展隔振频带,使系统具有更好的隔振性能。Shaw等^[5]用双稳板设计了一种轻且有效的高静态低动态刚度(HSLDS)的隔振系统,用实验的方法证明其比等价的线性系统具有更大的隔振区域以及更低的固有频率。彭献等^[6]采用连杆机构作为负刚度调节机构,研究了一种准零刚度隔振器的设计方法。Zhang等^[7]将欧拉压杆作为负刚度调节机构,

设计了正负刚度并联的隔振系统,不但显著降低了隔振系统的固有频率,同时也改善了系统的阻尼特性。徐道临等^[8]设计一款屈曲板型准零刚度隔振器,该隔振器由竖直的橡胶垫和屈曲的弹簧钢板组合而成。并针对承载质量的变化会影响隔振器性能的问题,设计了具有准零刚度特性的可调式非线性气动隔振器^[9]。刘兴天等^[10]提出具有负刚度特性的欧拉屈曲梁结构并分析其静态特性。Carrella等^[11-14]和王勇等^[15]利用斜置弹簧产生负刚度特性,并与正刚度弹簧相并联组成准零刚度隔振器。张月英^[16]在有关非线性隔振系统设计理论的基础上,设计并验证了一种由正负刚度并联组合得到准零刚度隔振器。Xu等^[17]利用电磁弹簧作为负刚度元件,设计了一种准零刚度隔振器,该新型隔振器的隔振性能,尤其在低频区域,超过了等价的线性隔振器。闫建^[18]基于屈曲状态下工作的欧拉梁能够提供负刚度的原理,设计了一种将欧拉梁与线性弹簧并联的低频隔振器,使其对低频振动具有良好的抑制效果。针对大型车载光电设备0~20 Hz低频段振动,基于准零刚度系统隔振原理,杜宁等^[19]提出了一种新的低频水平方向隔振方法。Ishida等^[20]提出了一种基于一种具有扭转屈曲模式可折叠圆筒的准零刚度隔振器。由于准零刚度具有高静态刚度低动态刚度,可以有效地克服传统非线性隔振器增加隔振频

收稿日期:2017-09-15

基金项目:国家自然科学基金(11432002)资助

作者简介:李东海(1992—),北京航空航天大学硕士研究生,主要从事结构动力学分析与控制研究。

率范围和保证静态承载力之间的矛盾,近年来,针对准零刚度隔振器的研究变得越来越热门。

准零刚度隔振器有着线性隔振器不可比拟的优点,但是相比线性隔振器而言,其共振峰值依然过大;由于准零刚度隔振器的固有非线性,所以会造成系统的跳跃现象,这种不稳定性是一种不安全因素,所以在工程实际应用中不期望其出现。因此为了获得更好的隔振性能,开展准零刚度隔振器的主动控制策略的研究就显得十分必要。准零刚度隔振器的动力学特性方程可以用具有三次非线性项的Duffing 振子模型来描述^[1,21-24]。目前针对准零刚度隔振器的主动控制研究相对较少,但是许多学者开展了对Duffing 振子和吸振器的主动研究^[25-28]。通过时滞控制可以有效地抑制传递到敏感元件上的振动。但是针对准零刚度隔振器的时滞控制研究相对较少,本文在之前的研究基础上,对准零刚度隔振器施加线性位移时滞控制,在力激励的情况下,利用平均法得到了准零刚度隔振器的动力学响应,在此基础上,分析了时滞控制参数对准零刚度隔振器的力传递率的影响。

1 准零刚度隔振器动态响应

1.1 准零刚度隔振器

本文采用2个斜置弹簧作为负刚度元件与竖直的正刚度弹簧相并联形成单自由度的准零刚度隔振器^[1,13]。对其进行线性时滞位移主动控制的结构模型如图1所示。

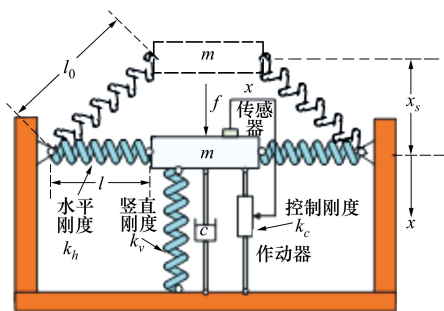


图1 准零刚度隔振器线性位移时滞控制结构示意图

在工作状态,斜置弹簧处于水平位置并达到静平衡点处^[11,13],其长度为 l 。自由状态时,距离静平

衡位置的距离为 x_s ; x 为负载质量 m 从静平衡位置开始的位移。斜置弹簧的原长为 l_0 。斜置弹簧的刚度为 k_h ,垂直弹簧的刚度为 k_v ,假设系统的阻尼为线性阻尼,阻尼系数为 c ,控制刚度为 k_c ,反馈信号为系统的线性位移 x ; f 为负载质量 m 受到的外界激励力。

1.2 简谐力作用下隔振器的响应

准零刚度隔振器线性位移时滞控制结构示意图如图1所示。为了建模的简便性,先考虑无控制系统的动力学特性。利用拉格朗日方程可以建立准零刚度隔振器在简谐力激励下的动力学方程。隔振器的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1)$$

现设静平衡位置为系统的势能零点,则该系统的总势能为

$$V = \frac{1}{2} k_h [(l_0 - \sqrt{l^2 + x^2})]^2 \times 2 + \frac{1}{2} k_v x^2 \quad (2)$$

拉格朗日函数可以表示为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \left[k_h (l_0 - \sqrt{l^2 + x^2}) + \frac{1}{2} k_v x^2 \right] \quad (3)$$

拉格朗日方程表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -c\dot{x} + F_e(t) \quad (4)$$

式中, $F_e(t) = F \cos(\omega t)$ 为隔振器受到的简谐激励力, t 为时间, ω 为简谐激励力的频率。联立(3)式和(4)式可得到隔振器的动力学方程

$$m\ddot{x} + 2k_h x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}} \right) + k_v x + c\dot{x} = F_e(t) \quad (5)$$

引入无量纲参数,可对(5)式无量纲化,得到隔振器的无量纲动力学方程

$$\hat{x}'' + 2\xi\hat{x}' + 2\hat{k}\hat{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\hat{l}^2 + \hat{x}^2(1 - \hat{l}^2)}} \right) + \hat{x} = f_e \cos(\Omega T) \quad (6)$$

式中, $\hat{k} = k_h/k_v$ 为刚度比; $\hat{x} = x/x_s$ 为无量纲位移; $\hat{l} = l/l_0$ 表征准零刚度隔振器的几何构型,其值越大则斜置弹簧的倾斜程度越小,反之亦然; $x_s = \sqrt{l_0^2 - l^2}$ 为负载质量在初始状态到静平衡点处的距离; $\omega_n = \sqrt{k_v/m}$ 为固有频率, $T = \omega_n t$ 为无量纲时间; $f_e = \frac{F_e}{k_v x_s}$ 为无量纲激励力幅值, $\Omega = \omega/\omega_n$ 为激励频率与固有

频率之比, $\xi = c/2m\omega_n$ 为隔振器的阻尼比, 算子 $(\cdot)'$ 的含义为 $(\cdot)' = d(\cdot)/dT$, 表示对无量纲时间求导。

考虑线性时滞位移控制, 控制增益为 k_c , 无量纲化为 $g = k_c/k_v$; $g(\hat{x}_\tau - \hat{x}) = g(\hat{x}(T - \tau) - \hat{x}(T))$ 为线性位移时滞控制的控制方程, 其中 τ 为时滞的无量纲化时间。则系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \hat{x}'' + 2\xi\hat{x}' + 2\hat{k}\hat{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\hat{l}^2 + \hat{x}^2(1 - \hat{l}^2)}} \right) + \\ \hat{x} + g\hat{x} = f_e \cos(\Omega T) + g\hat{x}_\tau \end{aligned} \quad (7)$$

当隔振器的位移相对初始位移为小量时, 可以将系统的动力学方程在静平衡点处泰勒展开并保留三次精度得到

$$\begin{aligned} \hat{x}'' + \left(1 - \frac{2\hat{k}(1 - \hat{l})}{\hat{l}} + g \right) \hat{x} + \left(\frac{\hat{k}(1 - \hat{l}^2)}{\hat{l}^3} \right) \hat{x}^3 + \\ 2\xi\hat{x}' = f_e \cos(\Omega T) + g\hat{x}_\tau \end{aligned} \quad (8)$$

令 $\alpha = 1 - 2\hat{k}(1 - \hat{l})/\hat{l}$ 为隔振器的线性刚度参数, $\gamma = \hat{k}(1 - \hat{l}^2)/\hat{l}^3$ 为无量纲非线性刚度参数。则 (8) 式可以表示为

$$\hat{x}'' + (\alpha + g)\hat{x} + \gamma\hat{x}^3 + 2\xi\hat{x}' = f_e \cos(\Omega T) + g\hat{x}_\tau \quad (9)$$

由 (9) 式可以清晰地看出来, 系统具有三次非线性项, 可以利用 Duffing 方程的部分特性来研究其特性。由于动力学方程中阻尼项的存在, 所以自由振动项会很快地衰减, 只剩下由于外界激励引起的受迫振动, 即为微分方程 (9) 的特解。利用平均法可以求出系统的一次近似解。设系统的响应为 $\hat{x} = \hat{X}\cos(\Omega T + \theta)$, \hat{X} 为系统响应的幅值, θ 为系统响应与激励的相位差。应用平均法可以得到系统的响应幅值 \hat{X} 与相位 θ 的变化率为

$$\begin{cases} \hat{X}' = -\frac{1}{\Omega}R(\hat{X}, \theta)\sin(\Omega T + \theta) \\ \theta' = -\frac{1}{\hat{X}\Omega}R(\hat{X}, \theta)\cos(\Omega T + \theta) \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} R(\hat{X}, \theta) = & -(\alpha + g)\hat{X}\cos(\Omega T + \theta) + \\ & 2\xi\hat{X}\Omega\sin(\Omega T + \theta)g\hat{X}[\cos(\Omega T + \theta)\cos\Omega\tau + \\ & \sin(\Omega T + \theta)\sin\Omega\tau]\hat{X}\Omega^2\cos(\Omega T + \theta) - \\ & \gamma\hat{X}^3\cos^3(\Omega T + \theta) + f_e\cos(\Omega T) \end{aligned}$$

将 $\Omega T + \theta$ 在 $0 \sim 2\pi$ 之间取平均值得到

$$\begin{cases} \hat{X}' = -\frac{1}{2\Omega}(g\hat{X}\sin\Omega\tau + 2\xi\hat{X}\Omega + f_e\sin\theta) \\ \theta' = -\frac{1}{2\Omega\hat{X}}\left(g\hat{X}\cos\Omega\tau + \hat{X}\Omega^2 - (\alpha + g)\hat{X} - \frac{3}{4}\gamma\hat{X}^3 + f_e\cos\theta\right) \end{cases} \quad (11)$$

令 $\hat{X}' = 0, \theta' = 0$ 可以求解系统的奇点 (\hat{X}_s, θ_s) 对应系统的周期性稳态响应。则得到

$$\begin{cases} g\hat{X}\sin\Omega\tau + 2\xi\hat{X}\Omega + f_e\sin\theta = 0 \\ g\hat{X}\cos\Omega\tau + \hat{X}\Omega^2 - (\alpha + g)\hat{X} - \frac{3}{4}\gamma\hat{X}^3 + f_e\cos\theta = 0 \end{cases} \quad (12)$$

利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 可以得到系统的幅频响应特性

$$\begin{aligned} \left(g\hat{X}\cos\Omega\tau + \hat{X}\Omega^2 - (\alpha + g)\hat{X} - \frac{3}{4}\gamma\hat{X}^3 \right)^2 + \\ \left(g\hat{X}\sin\Omega\tau + 2\xi\hat{X}\Omega \right)^2 = f_e^2 \end{aligned} \quad (13)$$

相频特性方程为

$$\tan\theta = \frac{2\xi\hat{X}\Omega + g\hat{X}\sin\Omega\tau}{g\hat{X}\cos\Omega\tau + \hat{X}\Omega^2 - (\alpha + g)\hat{X} - \frac{3}{4}\gamma\hat{X}^3} \quad (14)$$

该受时滞控制的准零刚度隔振器的更为详细的动态特性研究及稳定性分析见文献 [29], 为节省篇幅, 本文将不再赘述。

2 准零刚度隔振器力传递率

2.1 力传递率

现假设隔振器受到无量纲的简谐激励力为 $\hat{F}_e(t) = f_e \cos(\Omega T)$ 如图 1 所示, 经隔振器传递到基础上的力为 $F_i(t)$, 无量纲化后为 \hat{F}_i

$$\hat{F}_i = (\alpha + g)\hat{x} + \gamma\hat{x}^3 + 2\xi\hat{x}' - g\hat{x}_\tau \quad (15)$$

设 $\hat{F}_i = f_i \cos(\Omega T + \varphi_i)$, 对 (15) 式进行与 1.2 节中相同的步骤, 并忽略高次项可以得到:

$$\begin{aligned} f_i^2 = & (g\hat{X}\sin\Omega\tau + 2\xi\hat{X}\Omega)^2 + \\ & \left(g\hat{X}\cos\Omega\tau - (\alpha + g)\hat{X} - \frac{3}{4}\gamma\hat{X}^3 \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

一般地, 力传递率 T_F 定义为传递到基础上的载荷的幅值 f_i 和激励幅值 f_e 的比值。即

$$T_F = \left| \frac{f_i}{f_e} \right| \quad (17)$$

将(13)式和(16)式代入(17)式可得含有时滞线性位移的准零刚度隔振器的力传递率为

$$|T_F| = \frac{\sqrt{4\xi_{\text{eq}}^2\Omega^2 + \left(\alpha_{\text{eq}} + \frac{3}{4}\gamma\hat{\lambda}^2\right)^2}}{\sqrt{4\xi_{\text{eq}}^2\Omega^2 + \left((\alpha_{\text{eq}} - \Omega^2) + \frac{3}{4}\gamma\hat{\lambda}^2\right)^2}} \quad (18)$$

式中, $\xi_{\text{eq}} = \xi + \frac{g\sin\Omega\tau}{2\Omega}$, $\alpha_{\text{eq}} = \alpha + g(1 - \cos\Omega\tau)$, 为等效阻尼和等效线性刚度系数。当无时滞反馈时, $\xi_{\text{eq}} = \xi$, $\alpha_{\text{eq}} = \alpha$ 。

力传递率表征了隔振器在力激励下的隔振性能的好坏, 只有当力传递率小于1时, 隔振器才会发挥隔振性能, 且力传递率越小, 则表示传递到基础上的载荷越小, 隔振器的隔振性能越好。对于传统线性被动隔振器而言, 只有当外界激励力的频率与隔振器的固有频率之比大于 $\sqrt{2}$ 时才有隔振性能。为了更直观地分析准零刚度隔振器的隔振性能, 现将与准零刚度隔振器等价的线性隔振器, 即无斜置弹簧的隔振器考虑在内进行比较。图2为当施加在准零刚度隔振器上的无量纲外界简谐激励力的幅值 f_e 为无控制时, 允许施加在准零刚度隔振器上的载荷, 具体表达式见(23)式, 其中 $g = 0, \tau = 0, \alpha = 0$, 即 $f_{\text{lim}} = 4\xi(1/3\gamma)^{1/2}$ 。

图2a)中右边的曲线簇为有线性位移时滞控制的等效线性隔振器的力传递率曲线, 左边曲线簇是含有线性位移时滞控制的准零刚度隔振器的力传递率曲线。对比准零刚度隔振器的力传递率曲线和其等效线性隔振器的力传递率曲线可知, 当外界激励力为极限载荷时, 当频率比 $\Omega < 1$ 时, 尽管准零刚度隔振器的力传递率比其等效线性隔振器的力传递率大, 但是依然可以看出来, 准零刚度隔振器的隔振频率带依然比线性隔振器的频率带宽, 而当激励力的幅值小于极限载荷时, 准零刚度隔振器的隔振频带会更宽, 其隔振性能的优越性越明显, 该方面的论述详见参考文献[1]。

当有线性位移时滞控制时, 准零刚度隔振器低频段的力传递特性相比无时滞控制时的力传递率降低, 且传递率峰值也明显地降低, 由此可以看出时滞控制的阻尼效应, 且当时滞参数 τ 给定在合适范围内, 随着控制增益 g 的增加, 其等效阻尼 ξ_{eq} 越大^[29], 故其传递率峰值随着 g 的增加而降低, 且当等效阻尼越大时, 其高频段的力传递率越大。相比无控制

系统, 有时滞控制情况下的隔振频率较大, 且随着控制增益的增大有增大的趋势。对比有控制的准零刚度隔振器与其等效的线性隔振器的力传递特性, 可以清晰地看到有时滞控制的准零刚度隔振器的力传递特性要好于等效线性隔振器, 尤其是在高频段内, 准零刚度隔振器的力传递率有很大程度降低。在图2中也可以看出时滞控制对系统线性刚度的影响, 其表现在力传递率曲线的向右弯曲开始频率右移, 原因在于所选择的时滞参数和控制增益造成了系统的线性刚度系数增加。尽管如此, 有时滞控制的准零刚度隔振器的隔振性能依然好于无控制时的隔振器, 且可以增加系统的静态鲁棒性。

图2b)中外部激励力为极限载荷。在图中, 靠右的曲线簇为等效线性隔振器的力传递率特性曲线, 左边的曲线簇是准零刚度隔振器的力传递率特性曲线。准零刚度隔振器及其等效线性隔振器的力传递率特性曲线随着时滞参数 τ 的变化规律和图2a)中的变化规律类似。由此可见, 对准零刚度隔振器施加线性位移时滞控制不仅可以有效地改善系统的力传递率特性, 而且可以增加系统的静态鲁棒性。

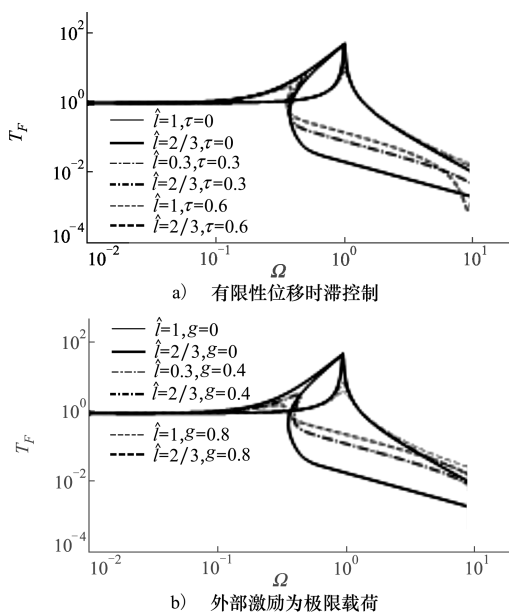


图2 含有线性位移时滞控制的准零刚度隔振器力传递率曲线

2.2 传递率峰值

准零刚度隔振器的传递率峰值发生在系统的位移响应最大时^[1], 而当系统的位移响应的相位和外部激励力的相位相差 $-\pi/2$ 时, 系统位移响应最

大^[22]。因此可由 (12) 式得到系统的最大响应位移为

$$\hat{X}_{\max} = \frac{f_e}{g\sin\Omega_{\max}\tau + 2\xi\Omega_{\max}} \quad (19)$$

式中, Ω_{\max} 表示当位移响应最大时所对应的频率比。可以得到其对应的外界激励力的幅值 f_e 为

$$f_e = 2(g\sin(\Omega_{\max}\tau) + 2\xi) \cdot \left(\frac{g\cos(\Omega_{\max}\tau) + \Omega_{\max}^2 - (\alpha + g)}{3\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

此时隔振器的最大位移响应为

$$\hat{X}_{\max} = 2 \left(\frac{g\cos\Omega_{\max}\tau + \Omega_{\max}^2 - (\alpha + g)}{3\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

将(21)式代入(18)式中就可以得到当系统发生最大位移响应时的频率为 Ω_{\max} 时的传递率峰值。

$$T_F = \frac{\sqrt{4\left(\xi + \frac{g\sin\Omega_{\max}\tau}{2\Omega_{\max}}\right)^2 + \Omega_{\max}^2}}{2\left(\xi + \frac{g\sin\Omega_{\max}\tau}{2\Omega_{\max}}\right)} \quad (22)$$

考虑到准零刚度隔振器的特性,故其传递率峰值所对应的频率比不能大于 1,因为若大于 1 时,则隔振性能不如等价的线性隔振器。所以,令 $\Omega_{\max} = 1$ 可得到所允许施加到隔振器上的最大外界力激励的幅值 $f_e |_{\Omega_{\max}=1}$ 为

$$f_e |_{\Omega_{\max}=1} = 2(g\sin\tau + 2\xi) \left(\frac{g\cos\tau + 1 - (\alpha + g)}{3\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

此时隔振器的最大响应位移为

$$\hat{X} |_{\Omega_{\max}=1} = 2 \left(\frac{g\cos\tau + 1 - (\alpha + g)}{3\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

将(24)式代入(22)中可以得到当发生最大位移响应时的频率为 $\Omega_{\max} = 1$ 时准零刚度隔振器传递率峰值 $T_F |_{\Omega_{\max}=1}$ 为

$$T_F |_{\Omega_{\max}=1} = \frac{\sqrt{4\left(\xi + \frac{g\sin\tau}{2}\right)^2 + 1}}{2\left(\xi + \frac{g\sin\tau}{2}\right)} \quad (25)$$

图 3a) 所示是当时滞参数 $\tau = \pi/6$ 时,准零刚度隔振器在不同控制增益参数 g 下的力传递率峰值。当 $g = 0$ 时表示无控制,由图 3a) 可知当控制参数选择在合适范围内时,有控制时系统的力传递峰值比

无控制时小,且当时滞参数一定时,随着控制增益的增加,系统的力传递率峰值相应减小。且力传递率峰值的大小随着共振频率的增加而增大。由图 3a) 可知时滞控制可以有效地抑制准零刚度隔振器的力传递率峰值,因而可以大幅地提高隔振器的隔振性能。图 3b) 所示是当控制增益参数 $g = 0.4$ 时,准零刚度隔振器在不同时滞参数 τ 下的力传递率峰值。图 3b) 中曲线的变化规律与图 3a) 中的变化规律类似,当控制增益一定且时滞参数在一定范围内时,隔振器的力传递率峰值随着时滞参数的增加而增加。说明时滞控制可以有效地抑制系统的力传递率峰值,大幅地提高系统的隔振性能。

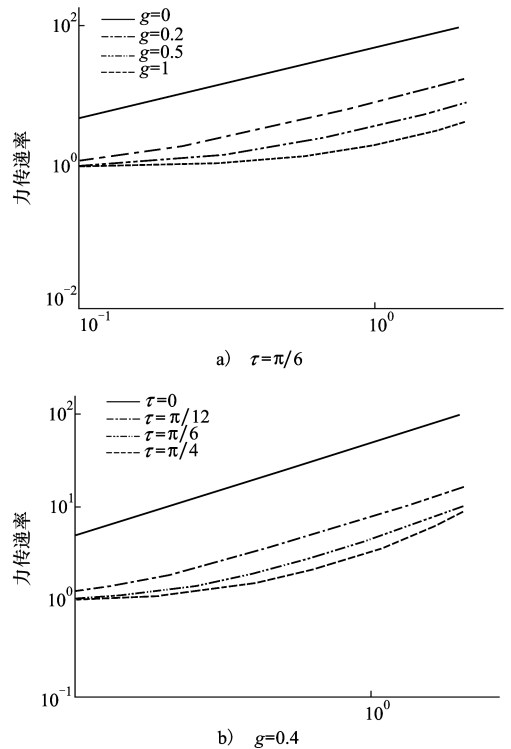


图 3 $\hat{k} = 1, \hat{l} = \hat{l}_{QZS}, \xi = 0.01$ 时准零刚度隔振器力传递率峰值曲线

图 4 为受控准零刚度隔振器在不同简谐力激励下的传递率曲线。不同激励力的传递率峰值均在传递率峰值曲线上。值得注意的是,当力激励幅值大约为不受控系统的临界载荷的 6 倍时,最大传递率发生在频率比为 1 处。意味受控系统相比不受控系统能够承受更大的激励力,因此能够适应更加极端的工作环境。

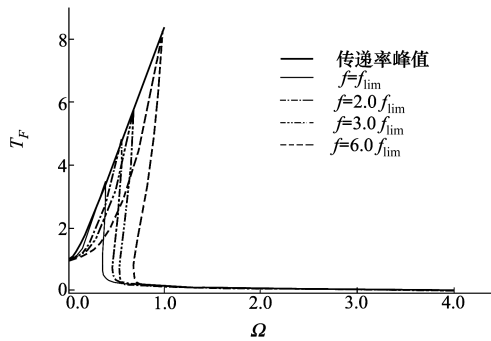


图4 不同简谐力激励下的受控准零刚度隔振器的力

$$\text{传递率} \left(g = 0.2, \tau = \frac{\pi}{6} \right)$$

3 算例分析

根据文献[30]中实测得到的某飞轮引起的径向扰振力为本文中的准零刚度隔振器所受到的外界激励,其具体表达式为

$$F_e(t) = 0.4\cos(120\pi t) + 11.4\cos(200\pi t) + 1.3\cos(240\pi t) + 0.33\cos(280\pi t) + 2.1\cos(400\pi t) + 1.5\cos(600\pi t) \quad (26)$$

其无量纲化的表达形式为

$$f_e(t) = 0.005 \ 8\cos(6.522T) + 0.165\cos(10.869T) + 0.018 \ 8\cos(13.043T) + 0.004 \ 7\cos(15.217T) + 0.030 \ 3\cos(21.739T) + 0.021 \ 7\cos(32.608T) \quad (27)$$

隔振器和飞轮的参数取值如表1所示。将各参数以及(27)式带入(8)式并联立(15)式可得到传递到基础上的无量纲力。图5为含有时滞控制的准零刚度隔振器对该飞轮扰振力的隔振效果。从图中可以得知,传递到基础上的力的幅值约为飞轮扰振力的 10^{-4} 倍。从曲线结果可以看出由于准零刚度隔振器的固有频率较低,对具有较高频的飞轮扰振力具有良好的隔振效果。

参考文献:

- [1] Carrella A, Brennan M J, Waters T P, et al. Force and Displacement Transmissibility of a Nonlinear Isolator with High-Static-Low-Dynamic-Stiffness[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 55(1): 22-29
- [2] Ibrahim R A. Recent Advances in Nonlinear Passive Vibration Isolators[J]. Journal of Sound & Vibration, 2008, 314(3/4/5): 371-452
- [3] Liu C, Jing X, Daley S, et al. Recent Advances in Micro-Vibration Isolation[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2015, 56/57(suppl 1): 55-80

表1 计算参数取值

序号	参数	取值
1	飞轮质量 m/kg	7.06
2	阻尼系数 $c/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	2.38
3	水平弹簧初始长度 l_0/m	0.06
4	水平弹簧长度 l/m	0.04
5	水平弹簧刚度 $k_h/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2×10^3
6	竖直弹簧刚度 $k_v/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2×10^3
7	控制弹簧刚度 $k_c/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	4×10^2
8	无量纲时滞时间 τ	$\pi/6$

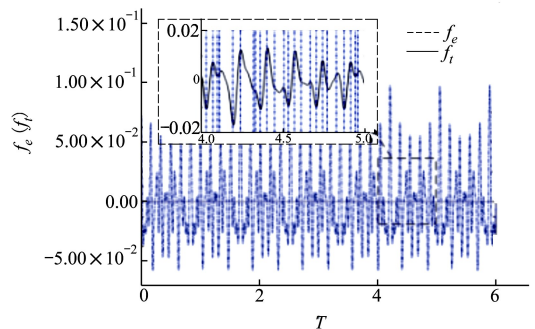


图5 含有时滞控制的准零刚度隔振器对飞轮扰振力隔振效果

4 结论

本文研究了带有线性位移时滞控制的三弹簧准零刚度隔振器在简谐力激励下的隔振性能。结果表明,相比线性隔振器,准零刚度隔振器的隔振频率带更宽;而增加时滞控制可以进一步地拓宽隔振带宽,改善低频带系统的隔振性能;且在高频段受控系统的力传递率要比不受控系统的力传递率小,表明增加时滞控制不仅可以改善低频段隔振性能,而且系统的高频段隔振性能也会得到改善。最后给出了力传递率峰值的理论结果,不仅表明有时滞控制的系统的力传递率峰值得到了有效地抑制,而且增加时滞控制可以使隔振器适应更加极端的工作环境。

- [4] Yang J, Xiong Y P, Xing J T. Dynamics and Power Flow Behaviour of a Nonlinear Vibration Isolation System with a Negative Stiffness Mechanism[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2012,332(1): 167-183
- [5] Shaw A D, Neild S A, Wagg D J. Dynamic Analysis of High Static Low Dynamic Stiffness Vibration Isolation Mounts[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2013,332(6): 1437-1455
- [6] 彭献, 黎大志, 陈树年. 准零刚度隔振器及其弹性特性设计[J]. *振动、测试与诊断*, 1997(4):44-46
Peng Xian, Li Dazhi, Chen Shunian. Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolators and Design for Their Elastic Characteristics[J]. *Journal of Vibration Measurement and Diagnosis*, 1997(4): 44-46 (in Chinese)
- [7] Zhang J Z, Shen D, Dan Li. Study on New Type Vibration Isolation System Based on Combined Positive and Negative Stiffness [J]. *Nanotechnology & Precision Engineering*, 2004, 2(4): 314-318
- [8] 徐道临, 成传望, 周加喜. 屈曲板型准零刚度隔振器的设计和特性分析[J]. *湖南大学学报(自科版)*, 2014,41(8): 17-22
Xu Daolin, Cheng Chuanwang, Zhou Jiayi. Design and Characteristic Analysis of a Buckling Plate Vibration Isolator with Quasi-Zero-Stiffness[J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2014,41(8): 17-22 (in Chinese)
- [9] 徐道临, 赵智, 周加喜. 气动可调式准零刚度隔振器设计及特性分析[J]. *湖南大学学报(自科版)*, 2013,40(6): 47-52
Xu Daolin, Zhao Zhi, Zhou Jiayi. Design and Analysis of an Adjustable Pneumatic Vibration Isolator with Quasi-Zero-Stiffness Characteristic [J]. *Journal of Hunan University(Natural Sciences)*, 2013, 40(6): 47-52 (in Chinese)
- [10] 刘兴天, 黄修长, 张志谊, 等. 激励幅值及载荷对准零刚度隔振器特性的影响[J]. *机械工程学报*, 2013,49(6):89-94
Liu Xingtian, Huang Xiuchang, Zhang Zhiyi, et al. Influence of Excitation Amplitude and Load on the Characteristics of Quasi-Zero Stiffness Isolator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013,49(6): 89-94 (in Chinese)
- [11] Carrella A, Brennan M J, Kovacic I, et al. On the Force Transmissibility of a Vibration Isolator with Quasi-Zero-Stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009,322(4/5): 707-717
- [12] Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Optimization of a Quasi-Zero-Stiffness Isolator[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2007,21(6): 946-949
- [13] Carrella A. *Passive Vibration Isolators with High-Static-Low-Dynamic-Stiffness* [D]. Southampton, University of Southampton, 2008
- [14] Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Static Analysis of a Passive Vibration Isolator with Quasi-Zero-Stiffness Characteristic[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2007,301(3/4/5): 678-689
- [15] 王勇, 李舜酩, 程春, 等. 立方速度反馈控制的准零刚度隔振器动力学特性分析[J]. *振动工程学报*, 2016,29(2): 305-313
Wang Yong, Li Shunming, Cheng Chun, et al. Dynamic Analysis of a Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolator with Cubic Velocity Feedback Control[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016,29(2): 305-313 (in Chinese)
- [16] 张月英. 准零刚度隔振器的特性分析及实验研究[D]. 长沙:湖南大学, 2013
Zhang Yueying. *On Analytical and Experimental Assessment of a Quasi-Zero-Stiffness Isolator* [D]. Changsha, Hunan University, 2013 (in Chinese)
- [17] Xu D, Yu Q, Zhou J, et al. Theoretical and Experimental Analyses of a Nonlinear Magnetic Vibration Isolator with Quasi-Zero-Stiffness Characteristic[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2013, 332(14): 3377-3389
- [18] 闫健. 准零刚度隔振器特性研究与星上隔振应用[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2016
Yan Jian. *Characterization Analysis of Quasi-Zero-Stiffness Isolator and Application on Satellite Vibration Suppression*[D]. Harbin, Harbin Institute of Technology, 2016 (in Chinese)
- [19] 杜宁, 胡明勇, 毕勇, 等. 一种车载设备的低频水平减振方法[J]. *振动与冲击*, 2017,36(7):184-190
Du Ning, Hu Mingyong, Bi Yong, et al. A Low Frequency Horizontal Vibration Reduction Method for a Vehicle-Borne Photoelectric Instrument[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(7): 184-190 (in Chinese)
- [20] Ishida S, Uchida H, Shimosaka H, et al. Design and Numerical Analysis of Vibration Isolators with Quasi-Zero-Stiffness Characteristics Using Bistable Foldable Structures[J]. *Journal of Vibration & Acoustics*, 2017,139(3): 031015-1-031015-8
- [21] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. The Limit Case Response of the Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, 43(6): 462-473
- [22] Brennan M J, Kovacic I, Carrella A, et al. On the Jump-up and Jump-down Frequencies of the Duffing Oscillator[J]. *Journal of*

Sound & Vibration, 2008,318(4): 1250-1261

- [23] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, et al. Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics[J]. Physical Review E, 2006, 74(2): 159-163
- [24] Kovacic I, Brennan M J, Lineton B. On the Resonance Response of an Asymmetric Duffing Oscillator[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, 43(9): 858-867
- [25] Nbandjo B R N, Salissou Y, Woaf P. Active Control with Delay of Catastrophic Motion and Horseshoes Chaos in a Single Well Duffing Oscillator[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2005,23(3): 809-816
- [26] Nbandjo B R N, Tchoukuegno R, Woaf P. Active Control with Delay of Vibration and Chaos in a Double-Well Duffing Oscillator [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2003,18(2):345-353
- [27] Zhao Y Y, Xu J. Effects of Delayed Feedback Control on Nonlinear Vibration Absorber System[J]. Journal of Sound & Vibration, 2007,308(1): 212-230
- [28] Huang S J, Huang K S, Chiou K C. Development and Application of a Novel Radial Basis Function Sliding Mode Controller[J]. Mechatronics, 2003,13(4): 313-329
- [29] 李东海, 赵寿根, 何玉金, 等. 含有线性位移时滞控制的准零刚度隔振器在简谐力激励下的动力学特性分析[J]. 振动与冲击, 2018(13): 49-55
Li Donghai, Zhao Shougen, He Yujin, et al. Dynamic Analysis of a Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolator with Time-Delayed Control under Harmonically Forcing Excitation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018(13): 49-55 (in Chinese)
- [30] 葛东明, 邹元杰, 张志娟, 等. 基于全柔性卫星模型的控制闭环微振动建模与仿真[J]. 航天器工程, 2012,5(21):58-63
Ge Dongming, Zou Yuanjie, Zhang Zhijuan, et al. Control Closed-Loop Micro-Vibration Modeling and Simulation Based on Flexible Satellite Model[J]. Spacecraft Engineering, 2012,5(21): 58-63 (in Chinese)

Study on the Performance of a Quasi-Zero-Stiffness Isolator with Time Delay Control

Li Donghai, Zhao Shougen, He Yujin, Li Tao

(School of Aeronautical Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: A quasi-zero-stiffness vibration isolation consists of a pair of oblique springs and a vertical spring, aiming at widening the vibration isolation region, is studied in this paper. The time delay linear displacement feedback control strategy is introduced to improve the performance of the isolator. The characteristics of dynamical response under harmonically forcing excitation is obtained by using averaging method. The force transmissibility of the control isolator is presented in this paper. The influence of the time delay linear displacement control on the force transmissibility is studied theoretically. The results show that the performance of the vibration isolation with time-delay control is better than the equivalent linear isolator in either low or high frequency region and the performance of controlled system is better than uncontrolled system.

Keywords: quasi-zero stiffness; vibration isolator; time delay control; force transmissibility