

基于无网格伽辽金法的非线性流动数值模拟

孟俊男, 潘光, 曹永辉, 李林丰, 黎针岑, 周冰

(西北工业大学 航海学院 西北工业大学无人水下运载技术重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:基于无网格伽辽金方法针对典型的非线性流动问题进行数值研究,对 Navier-Stokes 方程使用 Galerkin 方法离散,方程中的惯性项分别采取速度项提出法和直接推导法进行离散,使用罚函数法施加压力和速度边界条件,建立了基于 EFG 法的二维 N-S 方程的离散形式。针对定常非线性流动问题,对矩形域上下平板相向运动流动进行数值模拟,结果表明该方法求解精度比较高,计算误差不超过 3.66%;针对非定常非线性流动问题,采取 θ 加权法对 N-S 方程中的时间项进行离散,建立了 EFG 法非定常求解方程。以方柱绕流问题为例,证明了文中所建立的非定常算法的精度及收敛性。

关键词:无网格伽辽金法;罚函数法;Navier-Stokes 方程;直接线性交替迭代法

中图分类号: O357.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2019)01-0070-10

有限元法等传统基于网格的算法在针对一些情况复杂的问题,比如移动边界、界面变化、大变形(流固耦合、高速撞击等)、自由表面流等问题时,由于计算网格可能会出现畸变、重构等缺陷,从而限制了该类算法在数值模拟中计算效率及精度。而无网格方法^[1]是将求解域划分为一系列节点,不需要对求解域进行网格划分^[2]。没有了网格也就没有了网格之间拓扑关系的制约,能够部分或者彻底地摆脱计算过程对于网格的依赖^[3],这样就可以应用于结构大变形、动态裂纹扩展、结构优化等领域。无网格方法最早提出主要是用来解决天体问题,在 1977 年 Lucy 提出光滑粒子法(SPH)并且成功应用于天体物理学领域中^[4]。后来 Johnson 等针对轴对称几何问题提出了归一化平滑函数方法(NSF)^[5],通过 2 个圆柱体碰撞数值验证表明该方法提高了 SPH 法的计算精度。在 1981 年 Lancaster 等在传统的最小二乘法的基础上提出移动最小二乘法(MLS)^[6],称为构造无网格法的形函数的新方法,该方法能够解决传统的最小二乘法离散数据量大等缺点。后来 Belytschko 将 MLS 应用到无网格方法中,最先提出

无网格伽辽金方法(element-free Galerkin method)方法,使用高斯积分方法对求解域中的背景网格进行积分^[7-9],并将 EFG 方法应用于弹性问题、热传导问题^[10-12],计算结果表明在收敛性上及精度上 EFG 法比有限元法具有很明显的优势^[13-17]。

1 EFG 法理论与基础

无网格伽辽金算法采用移动最小二乘法来构造其形函数,假定二维流场中的常函数在节点 x 邻域 Ω_x 内局部近似为 $u(x)$

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) b_j(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{b}(x) \quad (1)$$

式中, $u^h(x)$ 为函数 $u(x)$ 的近似表达式, $p_j(x)$ 为基函数,本文中基函数主要取线性基函数,即 $p_j(x) = [1, x, y]^T$, m 为基函数的个数; $b_j(x)$ 为系数向量, $b_i(x)$ 为待定系数。 $b_i(x)$ 可以通过求近似函数 $u^h(x)$ 在点 x 的邻域 Ω_x 内误差加权平方和的最小值

收稿日期: 2018-03-12

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFC0301300)与国家自然科学基金(11502210, 51709229, 5149170)资助

作者简介: 孟俊男(1993—),女,西北工业大学博士研究生,主要从事扑翼推进机理研究。

通信作者: 潘光(1969—),西北工业大学教授、博士生导师,主从事水中兵器总体设计及流体力学研究。

E-mail: panguang@nwpu.edu.cn

来确定。

$$\mathbf{P}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)] \quad (2)$$

$$\mathbf{b}^T(x) = [b_1(x), \dots, b_m(x)] \quad (3)$$

求解 $J(x)$ 关于 $\mathbf{b}(x)$ 的极值,最终得到的场函数近似表达式如下所示,其中 $\Phi(x)$ 为形函数。

$$J(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x - x_i) \left\{ \sum_{j=1}^m p_j(x_i) b_j(x) - u_i \right\}^2 \quad (4)$$

$$u^h(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = \Phi(x) \mathbf{u} \quad (5)$$

计算得到的 $\mathbf{A}(x)$ 和 $\mathbf{B}(x)$ 的表达式如下所示, $\omega_i(x)$ 为权函数。

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} \omega_1(x) p(x_1) & \omega_2(x) p(x_2) & \dots \\ \omega_N(x) p(x_N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

由于使用 EFG 方法构造的形函数不满足 Kronecker- δ 性质,因而不能像有限元法那样直接施加本质边界条件,无网格方法中对于边界条件的施加主要有罚函数法、拉格朗日法、配点法等。在本文中主要使用罚函数法 (penalty function method, PM) 施加本质边界条件,PM 法主要是在本质边界条件中引入一个罚因子 α ,使用该方法可以简化离散方程中的系数矩阵,施加后系数矩阵依然具备带宽及正定的性质,而且未引进多余的变量数。其中对任意表达式 ξ 的 PM 法实施过程如下所示

$$\xi = \xi + \alpha \int_{\Gamma_i} u(u - u_i) d\Gamma_i \quad (8)$$

式中, u 代表某一变量, u_i 表示该变量的取值。

本文中权函数选用三次样条权函数,其形式如下所示

$$\omega_i(x - x_i) = \omega(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_i^2 + 4r_i^3, & r_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3, & 0.5 < r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (9)$$

在 EFG 法中,节点处的影响域形状一般有矩形和圆形,本文中为了简化计算选取矩形影响域,节点 i 处的矩形支持域尺寸表达式如下

$$\begin{aligned} d_{xi} &= d_{\max} \times r_x \\ d_{yi} &= d_{\max} \times r_y \end{aligned} \quad (10)$$

式中, d_{xi} 和 d_{yi} 分别为矩形支持域的长度和宽度,其中 d_{\max} 是控制节点影响域大小的比例参数,因此 d_{\max} 的取值直接关系到数值结果的计算精度。 d_{\max} 的大

小一般要求满足以下 2 个条件:① 要保证所有的节点权函数的影响域的并集能覆盖整个求解域;② 保证局部影响域包含的节点数不能少于基函数的项数。为了提高精度和保证矩阵可逆运算,节点权函数的影响域应尽可能大些,但为了保持逼近函数的局部特性,节点权函数的影响域也不能太大,否则会无谓增加计算量, r_x 和 r_y 分别为水平方向和竖直方向上相邻两点之间的间距。则可以得到权函数的具体表达式为

$$w_i(x) = w(r_x) \cdot w(r_y) = w\left(\frac{x - x_r}{d_{xi}}\right) w\left(\frac{y - y_r}{d_{yi}}\right) \quad (11)$$

由于使用 MLS 近似方法构造 EFG 方法的近似函数会需要进行矩阵求逆,求逆过程计算量较大,不同于 FEM 方法,EFG 法中的近似函数大都不属于多项式,无法直接求出其积分表达式,只能对其数值积分,因此 EFG 法需要在求解域中设置一定数量的背景网格,并且在背景网格中进一步设定一系列有规律的积分节点,这些节点就是高斯积分点,然后对每一个背景网格中高斯点进行高阶积分来保证求解精度。背景网格及高斯积分点划分模型如图 1 所示。

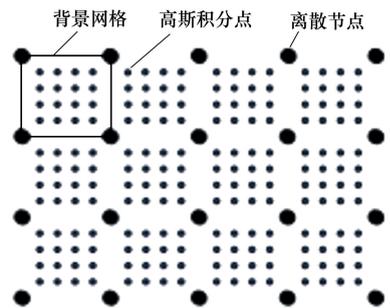


图 1 背景网格示意图

2 控制方程离散形式求解

2.1 计算流体力学基本数学方程

对于某一个具体的流动问题,首先确定能够表达其问题的微分方程和边界条件。对于一般的计算流体力学问题,假设该流体是牛顿流体,且不考虑热效应的影响,则考虑其惯性项和时间项的二维不可压缩黏性流动问题数学表达式及其边界条件为:连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

运动性方程

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ & \mu \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x} - f_x = 0 \\ & \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ & \mu \left[2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial y} - f_y = 0 \end{aligned}$$

边界条件

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} \end{aligned} \quad \text{in } \Gamma_i (i = 1, 2, \dots)$$

2.2 加权余量方程

流场内任意一个节点的速度可以表示为该节点处的插值函数与该节点邻域内所包含系列节点的速度乘积之和,同样也适用于节点处压力的求解,可以近似表达为:

$$\begin{cases} p(x) \approx p^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) p_i = \Phi_1 P \\ u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) u_i = \Phi_2 U \\ v(x) \approx v^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{3i}(x) v_i = \Phi_3 V \end{cases} \quad (12)$$

对控制方程的离散推导使用 Galerkin 离散方法,将连续性方程和运动性方程与权函数相乘并在计算域内进行积分,权函数与插值函数保持一致,得出其加权积分形式如下所示:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \Phi_1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} d\Omega = 0 \\ & \iint_{\Omega} \Phi_2 \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - f_x \right] d\Omega = 0 \\ & \iint_{\Omega} \Phi_3 \left[\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - f_y \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)式中的时间项和对流项中的密度提出,其余项在计算域内应用分部积分得到其在自然边界条件下的弱形式积分表达式如下所示:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 u \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\ & 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} P \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} d\Omega - \iint_{\Omega} \Phi_2 f_x d\Omega = 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma + \\ & \mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi_2 P n_x d\Gamma \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 v \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \\ & 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega - \\ & \iint_{\Omega} P \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} d\Omega - \iint_{\Omega} \Phi_3 f_x d\Omega = 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial x} n_x d\Gamma + \\ & \mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi_3 P n_x d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

2.3 压力项处理

对于公式(14),引入足够大的系数罚因子 λ ,则压力项可以用速度项表示,这样可以将连续性方程引入到运动方程中,从而简化求解方程的形式,使用速度和罚因子表达的压力方程如下所示:

$$P = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (15)$$

将(15)式带入弱形式积分表达式中,得到:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\ & \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \\ & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} d\Omega - \iint_{\Omega} \Phi_2 f_x d\Omega = 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma + \\ & \mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi_2 P n_x d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma} \Phi_2 P n_x d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

以及

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 \cdot \\ & v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \cdot \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega - \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \cdot \end{aligned}$$

$$d\Omega - \iint_{\Omega} \Phi_3 f_y d\Omega = 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial y} n_y d\Gamma + \quad (17)$$

$$\mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi_3 P n_y d\Gamma$$

2.4 施加本质边界条件

采用罚函数法施加本质边界条件,引入罚因子 α ,施加边界条件后的方程如下所示:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \\ & \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_i} (u - u_i)^2 d\Gamma - \\ & \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} d\Omega - \iint_{\Omega} \Phi_2 d\Omega f_x = \\ & 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x d\Gamma + \mu \int_{\Gamma} \Phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma} \Phi_2 P n_x d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

以及

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \\ & 2\mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \mu \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega + \\ & \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_i} (v - v_i)^2 d\Gamma - \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} d\Omega - \\ & \iint_{\Omega} \Phi_3 f_y d\Omega = 2\mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \frac{\partial v}{\partial y} n_y d\Gamma + \\ & \mu \int_{\Gamma} \Phi_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi_3 P n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

2.5 惯性项离散

对于惯性项的离散,一般有速度提出法和直接推导法 2 种。速度项提出法是将节点邻域内所包含的系列节点速度向量提出,其实施过程如下所示:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_2^T \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Phi_2^T \right) d\Omega u^T u \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_3^T \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \Phi_3^T \right) d\Omega w^T u \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_2^T \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Phi_2^T \right) d\Omega u^T v \end{aligned}$$

$$\rho \iint_{\Omega} \Phi_3 v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_3^T \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \Phi_3^T \right) d\Omega w^T v \quad (20)$$

使用直接推导法离散惯性项是将节点的速度直接使用形函数表示,其实施过程如下所示:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_2^T \Phi_2 u \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) d\Omega u \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_3^T \Phi_3 u \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right) d\Omega w \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_2 v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_2^T \Phi_2 v \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) d\Omega u \\ & \rho \iint_{\Omega} \Phi_3 v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi_3^T \Phi_3 v \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right) d\Omega w \end{aligned} \quad (21)$$

将施加边界条件后的方程写成如下所示的矩阵方程形式,其中使用速度项提出法离散惯性项后所对应的矩阵方程如下所示:

$$\begin{aligned} M\dot{u} + (k_{11} + k_u + g_1 u^T)u + (k_{12} + g_2 u^T)v &= F_1 + F_u \\ M\dot{v} + (k_{21} + g_1 v^T)u + (k_{22} + k_v + g_2 v^T)v &= F_2 + F_v \end{aligned} \quad (22)$$

使用直接推导法离散惯性项后所对应的矩阵方程如下所示:

$$\begin{aligned} M\dot{u} + (k_{11} + k_u + q_1 + q_2)u + k_{12}v &= F_1 + F_u \\ M\dot{v} + k_{21}u + (k_{22} + k_v + q_1 + q_2)v &= F_2 + F_v \end{aligned} \quad (23)$$

式中, \dot{u} 和 \dot{v} 分别代表 x 方向和 y 方向的速度的一阶导数, u,v 分别代表 x 方向和 y 方向的速度,上述方程中各个系数矩阵表示如下所示:

$$(M)_{ij} = \iint_{\Omega} (\rho \Phi_i^T \Phi_j) d\Omega \quad (24)$$

$$(k_{11})_{ij} = \iint_{\Omega} (2\mu \Phi_{i,x}^T \Phi_{j,x} + \mu \Phi_{i,y}^T \Phi_{j,y} - \lambda \Phi_{i,x}^T \Phi_{j,x}) d\Omega \quad (25)$$

$$(k_{12})_{ij} = \iint_{\Omega} (\mu \Phi_{i,x}^T \Phi_{j,y} - \lambda \Phi_{i,x}^T \Phi_{j,y}) d\Omega \quad (26)$$

$$(k_{21})_{ij} = \iint_{\Omega} (\mu \Phi_{i,y}^T \Phi_{j,x} - \lambda \Phi_{i,y}^T \Phi_{j,x}) d\Omega \quad (27)$$

$$(k_{22})_{ij} = \iint_{\Omega} (\mu \Phi_{i,x}^T \Phi_{j,x} + 2\mu \Phi_{i,y}^T \Phi_{j,y} - \lambda \Phi_{i,y}^T \Phi_{j,y}) d\Omega \quad (28)$$

$$(q_1)_i = \rho \iint_{\Omega} (\Phi_i u \Phi_i^T \Phi_{i,x}) d\Omega$$

$$(q_2)_j = \rho \iint_{\Omega} (\Phi_j v \Phi_j^T \Phi_{j,y}) d\Omega \quad (29)$$

$$g_1 = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Phi^T \right) d\Omega$$

$$g_2 = \rho \iint_{\Omega} \left(\Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Phi^T \right) d\Omega \quad (30)$$

$$(F_1)_i = \iint_{\Omega} (f_x \Phi_i) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_x \Phi_i) d\Gamma$$

$$(F_2)_j = \iint_{\Omega} (f_y \Phi_j) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_y \Phi_j) d\Gamma \quad (31)$$

$$(k_u)_{i,j} = \alpha \int_{\Gamma_u} (\Phi_i^T \Phi_j) d\Gamma$$

$$(k_v)_{i,j} = \alpha \int_{\Gamma_v} (\Phi_i^T \Phi_j) d\Gamma \quad (32)$$

$$(F_u)_i = \alpha \int_{\Gamma_u} (u_i \Phi_i^T) d\Gamma$$

$$(F_v)_j = \alpha \int_{\Gamma_v} (v_j \Phi_j^T) d\Gamma \quad (33)$$

3 非线性流动问题研究

3.1 定常非线性流动计算

3.1.1 数学模型

对于定常流动问题,在求解时需要将 N-S 方程中的时间项去掉。考虑惯性项的情况下,方程成为非线性方程,对于非线性项的处理为 Newton-Raphson 迭代法和直接线性交替迭代法。使用 N-R 迭代方法求解使用速度项提出法离散惯性项后所对应的矩阵方程,得到矩阵方程如下式所示。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^k}{\partial u} & \frac{\partial R_1^k}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2^k}{\partial u} & \frac{\partial R_2^k}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^k}{\partial u} & \frac{\partial R_1^k}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2^k}{\partial u} & \frac{\partial R_2^k}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

式中

$$R_1 = (k_{11} + k_u + g_1 u) u + (g_2 u + k_{12}) v - (F_1 + F_u)$$

$$R_2 = (k_{22} + k_v + g_2 v) v + (g_1 v + k_{21}) u - (F_2 + F_v) \quad (35)$$

使用直接线性交替迭代方法处理使用直接推导法离散惯性项后所对应的矩阵方程,可以得到矩阵方程如下式所示。

$$\begin{bmatrix} k_{11} + k_u + q_1^n + q_2^n & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} + k_v + q_1^n + q_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_u \\ F_2 + F_v \end{bmatrix} \quad (36)$$

3.1.2 算例分析

首先采用 EFG 法求解平板相向运动的流动问

题,示意图如图 2 所示。该模型可以作为对不可压流场模拟结果的验证。

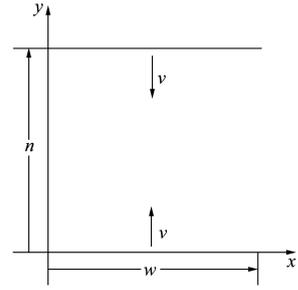


图 2 矩形域两平板相向运动流动模型

矩形域主要由 3 块平板组成,坐标系如图所示;流场域的长度 w 取值为 1 m,宽度 H 取值为 1 m;流场内部的流体密度取值 $\rho = 1\,000 \text{ kg/s}^2$,流体黏度取值 $\mu = 0.001 \text{ N} \cdot \text{m/s}^2$ 。

通过推导,得出该流动问题的解析解表达式如下所示:

$$u = \frac{3v_0 x}{2 \left(\frac{H}{2} \right)} \left(1 - \frac{\left(y - \frac{H}{2} \right)^2}{\left(\frac{H}{2} \right)^2} \right)$$

$$v = - \frac{v_0 \left(y - \frac{H}{2} \right)}{2 \left(\frac{H}{2} \right)} \left(3 - \frac{\left(y - \frac{H}{2} \right)^2}{\left(\frac{H}{2} \right)^2} \right) \quad (37)$$

程序中的参数设置如下:EFG 法中的流场域内离散结点均匀分布,节点分布为 441 (21×21);压力罚因子 λ 取值为 10^{10} ,速度罚参数 α 取值为 10^6 ;速度采取线性插值;支持域的缩放系数 d_{\max} 取 $1.2^{[18]}$ 。解析解中节点设置与 EFG 法相同。

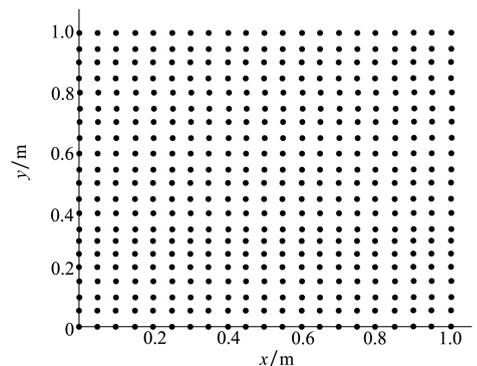


图 3 流场区域节点分布图

本算例中将使用直接线性交替迭代法处理非线性

性问题并进行数值模拟,并作出流场稳定后速度分布和流线图,并与解析解结果进行对比分析,图 4 和图 5 展示了 EFG 法与解析解的速度云图,对比可以发现,2 种算法的速度云图趋势一致。观察 EFG 解的速度场云图可以发现,流体满足不可压缩性。说明使用 EFG 模拟可以得到符合实际情况的流场分布。

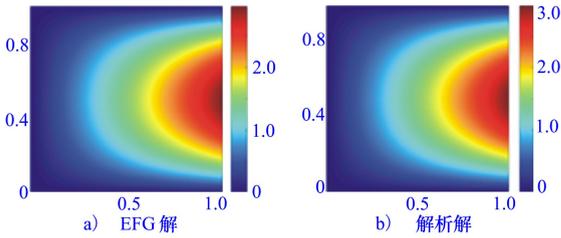


图 4 EFG 解与解析解水平方向速度云图对比

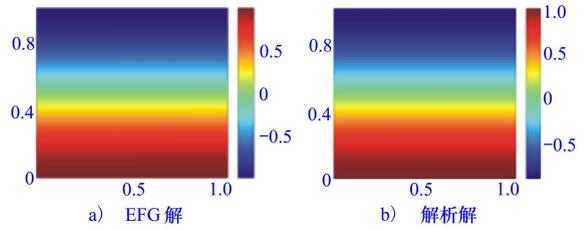


图 5 EFG 解与解析解竖直方向速度云图对比

在左端附近和右端出口附近分别选取 $x=0.2\text{ m}$ 和 $x=0.8\text{ m}$ 的 2 条竖线,并分别在这 2 条垂直线上选取一系列节点,求解这些节点处的速度数值解以及 EFG 解和解析解之间的相对误差,其中的速度单位为 m/s ,速度及相对误差结果展现在表 1 和表 2 中。从表中可以看出对于所选择的系列节点,EFG 解与解析解的相对误差最大不超过 3.66%,从而可以验证 EFG 算法在此算例中的精度比较高。

表 1 左端口附近垂直线上 EFG 解相对误差 ($x=0.2\text{ m}$)

纵坐标	EFG 解所得速度 $u/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	解析解	误差/%	EFG 解所得速度 $v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	解析解	误差/%
0	0.000 0	0.000	0	1.000 0	1.000	0
0.1	0.223 9	0.216	3.66	0.940 9	0.944	0.33
0.2	0.387 9	0.384	1.02	0.786 3	0.792	0.72
0.3	0.502 5	0.504	0.30	0.562 2	0.568	1.02
0.4	0.570 5	0.576	0.95	0.292 4	0.296	1.22
0.5	0.593 0	0.600	1.17	0.000 0	0.000	0

表 2 右端口附近垂直线上 EFG 解相对误差 ($x=0.8\text{ m}$)

纵坐标	EFG 解所得速度 $u/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	解析解	误差/%	EFG 解所得速度 $v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	解析解	误差/%
0	0.000 0	0.000	0	1.000 0	1.000	0
0.1	0.892 2	0.864	3.66	0.941 4	0.944 0	0.28
0.2	1.549 6	1.536	1.02	0.787 5	0.792	0.57
0.3	2.010 1	2.016	0.30	0.563 5	0.568	0.79
0.4	2.283 2	2.304	0.95	0.293 2	0.296	0.95
0.5	2.373 8	2.400	1.17	0.000 0	0.000	0

3.2 非定常非线性流动计算

3.2.1 数学模型

对于非定常问题的求解,需要在定常问题的迭代求解过程中外加一个时间迭代层,当每一迭代时刻计算 $N(N$ 的选取与所计算的问题有关) 个迭代步后,即可进入下一个时间迭代层的计算。对于时间

项的离散,采用向前差分法处理 N-S 方程中的时间导数项,时间项可以表示如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(u_{n+1} - u_n)}{\Delta t} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(v_{n+1} - v_n)}{\Delta t} \quad (38)$$

采取 θ 加权法,引入 θ 因子,将方程中的速度项可以表示成当前时间步长 $n + 1$ 与上一时间步长 n

的速度分布结果之和,其表示式如所示

$$\begin{aligned} u &= \theta u_{n+1} + (1 - \theta) u_n \\ v &= \theta v_{n+1} + (1 - \theta) v_n \end{aligned} \quad (39)$$

式中, θ 在 0 到 1 之间取值,将 θ 取值为 0 则上式为显式格式,此时每求解每一个时间步时不需要求解非线性方程,缺点是该方法极不容易收敛; θ 取值为 2/3 时则为伽辽金格式; θ 取值为 0 则为隐式格式,此时在每一个时间步长内仍需求解非线性方程,不过

$$\begin{bmatrix} M + \Delta t \cdot (k_{11} + k_u + q_1 + q_2) & \Delta t \cdot k_{12} \\ \Delta t \cdot k_{21} & M + \Delta t \cdot (k_{22} + k_v + q_1 + q_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mu_n + \Delta t \cdot (F_1 + F_u) \\ Mv_n + \Delta t \cdot (F_2 + F_v) \end{bmatrix} \quad (41)$$

将 θ 取值为 0 即此时时间项采取全显式离散格式,将三次样条权函数方程中的速度均表达成为隐式格式,此时速度表达式如下:

$$u = u_n \quad v = v_n$$

带入三次样条权函数方程得到下式,其中 Δt 为时间步长。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mu_n + f_u \\ Mv_n + f_v \end{bmatrix} \quad (42)$$

式中, f_u 与 f_v 的表达式如下所示:

$$\begin{aligned} f_u &= Mu_n + \Delta t(F_1 + F_u) - \\ & (k_{11} + k_u + q_1 + q_2)u_n - k_{12}v_n \\ f_v &= Mv_n + \Delta t(F_2 + F_v) - \\ & k_{21}u_n - (k_{22} + k_v + q_1 + q_2)v_n \end{aligned} \quad (43)$$

这个算例是对二维方柱进行绕流计算分析。流场域结构如图 6 所示,该流场域的长度为 8 m,宽度为 4 m,在流场区域中节点按照均匀布置,均匀分布 5 290 个节点改变不同的来流速度研究速度对方柱绕流流场的影响。

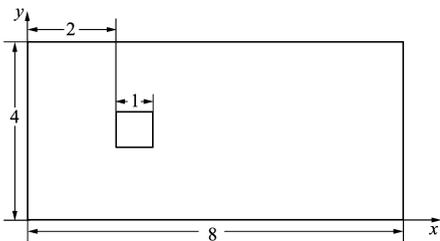


图 6 方柱绕流计算区域模型

此时计算收敛速度较快。

时间项采用全隐式离散形式,即将三次样条权函数中的速度表达成为隐式格式,此时速度表达式如下所示:

$$u = u_{n+1} \quad v = v_{n+1} \quad (40)$$

将隐式形式的速度的表达式带入三次样条权函数方程得到总体 N-S 方程的隐式向后差分格式如下式所示:

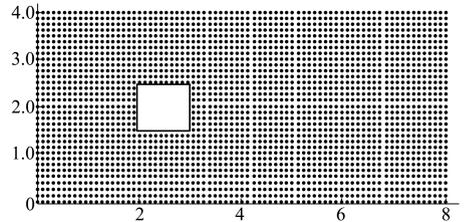


图 7 流场区域节点图

3.2.2 算例分析

针对一系列不同雷诺数的方柱绕流问题,基于 EFG 法的非定常算法进行数值模拟,计算时间步长 Δt 取 1 s。

当来流速度较小时,即雷诺数 Re 小于 50 时,流场的初始条件按照还未发生改变的流动状态施加,采用直接线性交替迭代法求解,计算得到稳定后方柱周围的速度云图以及流线图如图 8 所示。

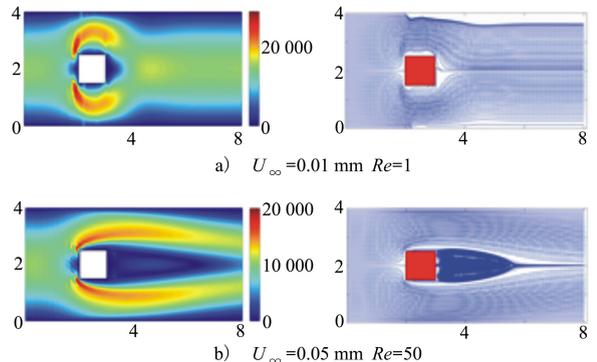


图 8 不同来流速度下的方柱周围速度云图及流线图

当来流速度继续增加时,非线性作用更加强烈,

此时需要使用 Newton-Raphson 迭代法和直接线性交替迭代法来计算,得出的方柱周围流场内的法向速度云图以及流线图如图 9 所示。

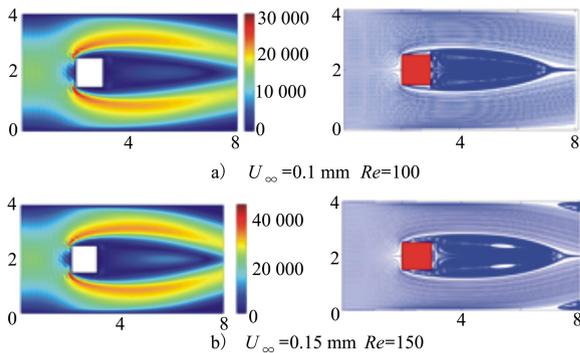


图 9 不同来流速度下的方柱周围速度云图及流线图

图 10 展示了 Re 为 100 时分别使用 EFG 法和 FEM 法计算得到的竖线 $x = 3.5 \text{ m}$ 上的水平方向速度拟合图。从图中看出 2 种方法计算得到的速度拟合图拥有很好的吻合度。再将稳定后的流场结构与使用 EFG 法稳态求解结果对比发现两图流动趋势一致,并且回流区长度也一致,由此可见,在适当的时间步长下,使用非定常 EFG 求解法同样能够细致入微地描述方柱周围流体的流动过程。

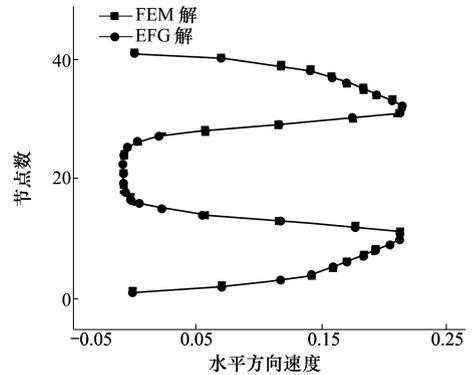


图 10 $Re = 100$ 时竖线 $x = 3.5 \text{ m}$ 上速度拟合图

4 结 论

本文针对典型的非线性流动问题进行数值研究,主要工作及结论如下:

1) 借鉴 FEM 算法中的 Galerkin 离散方法,对 N-S 方程进行 EFG 法离散,使用罚函数法施加压力边界条件和速度边界条件;分别采取速度项提出和直接推导法离散方程中的惯性项。

2) 针对定常非线性流动问题,首先推导了使用 Newton-Raphson 迭代法和直接线性交替迭代法求解定常非线性 N-S 方程的矩阵形式。并以矩形域上下平板相向运动流动问题为例进行数值模拟,验证了 EFG 法的可靠性。

3) 针对非定常非线性流动问题,使用 θ 加权法对 N-S 方程中的时间项离散,并推导了 EFG 法非定常求解公式;以一系列不同雷诺数的方柱绕流问题为例,使用 EFG 法进行数值实验。

参考文献:

- [1] 蒋博,蔡晓龙. 基于 Matlab 的移动最小二乘法数据拟合[J]. 数学技术与应用,2015(10): 110-111
JIANG Bo, CAI Xiaolong. Matlab-Based Mobile Least Squares Data Fitting[J]. Mathematical Technology and Applications, 2015(10): 110-111 (in Chinese)
- [2] 吴俊超,邓俊俊,王家睿. 伽辽金型无网格法的数值积分方法[J]. 固体力学学报,2016,37(3):208-233
WU Junchao, DENG Junjun, WANG Jiarui. Galerkin-Type Meshless Numerical Integration Method[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2016, 37(3): 208-233 (in Chinese)
- [3] 丁睿,朱征城. 一类时间二阶发展型变分不等式的 EFG 方法及其收敛性分析[J]. 应用数学学报,2015,38(5):874-891
DING Rui, ZHU Zhengcheng. The EFG Method and Its Convergence Analysis for a Class of Time-Order Second-Order Variational Inequalities[J]. Chinese Journal of Applied Mathematics, 2015, 38(5): 874-891 (in Chinese)
- [4] LUCY L B. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis[J]. The Astronomical Journal, 1977, 82(12): 1013-1024
- [5] JOHNSON G R, BEISSEL S R. Normalized Smoothing Functions for Sph Impact Computations[J]. International Journal for

- Numerical Methods in Engineering, 1996, 39: 2725-2741
- [6] LANCASTER P, SALKAUSKAS K. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods[J]. Mathematics of Computation, 1981, 37: 141-158
- [7] PITA C M, FELICELLI S D. Applications of the Immersed Element-Free Galerkin Method[J]. Mecnica Computacional, 2008 (8): 541-561
- [8] 杨建军,郑建龙. 无网格局部强弱法求解不规则域问题[J]. 力学学报, 2017, 49(3): 659-666
YANG Jianjun, ZHENG Jianlong. The Meshless Local Strong and Weak Method Solves the Irregular Domain Problem[J]. Chinese Journal of Mechanics, 2017, 49(3): 659-666 (in Chinese)
- [9] SHEDBALE A S, SINGH I V. Ductile Failure Modeling and Simulations Using Coupled Fe-EFG Approach[J]. International Journal of Fracture, 2016, 203(1/2): 183-209
- [10] 张飞,张国达,任红萍. 基函数的阶数对无单元伽辽金方法精度的影响[J]. 西南民族大学学报, 2017, 43(2): 177-185
ZHANG Fei, ZHANG Guoda, REN Hongping. The Influence of the Order of Basis Functions on the Accuracy of the Elementless Galerkin Method[J]. Journal of Southwest University for Nationalities, 2017, 43(2): 177-185 (in Chinese)
- [11] 易若愚. 二维 N-S 方程的 EFG 数值模拟及其应用研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2016
YI Ruoyu. Efg Numerical Simulation of Two-Dimensional N-S Equations and Its Application[D]. Xiangtan, Xiangtan University, 2016 (in Chinese)
- [12] 欧阳邦,龚曙光. EFG 法二维不可压缩层流问题的数值方法研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2016
OUYANG Bang, GONG Shuguang. Numerical Method for Two-Dimensional Incompressible Laminar Flow Problem with EFG Method[D]. Xiangtan, Xiangtan University, 2016 (in Chinese)
- [13] MICHAEL Hillman, CHEN Jiunshyan. An Accelerated, Convergent, and Stable Nodal Integration in Galerkin Meshfree Methods for Linear and Nonlinear Mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 107: 603-630
- [14] 覃霞,曾治平,彭林欣. 弹性地基上矩形加肋板自由振动分析的无网格法[J]. 应用力学学报, 2017, 34(6): 1027-1033
QIN Xia, ZENG Zhiping, PENG Linxin. Free Mesh Vibration Analysis of Rectangular Ribbed Plates on Elastic Foundations[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2017, 34(6): 1027-1033 (in Chinese)
- [15] LI Xiaolin. A Meshless Interpolating Galerkin Boundary Node Method for Stokes Flows[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, 51: 112-122
- [16] FAYSSAL B, HALASSI A, DRISS O, et al. A Stabilized Meshless Method for Time-Dependent Convection-Dominated Flow Problems[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2017, 137: 159-176
- [17] 陈苍,杨书仪. 冲击动力学中无网格法应用[J]. 湖南大学学报, 2017, 32(1): 30-36
CHEN Cang, YANG Shuyi. Application of Meshless Method in Impact Dynamics[J]. Journal of Hunan University, 2017, 32(1): 30-36 (in Chinese)
- [18] 程玉民. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015
CHENG Yumin. Meshless Method[M]. Beijing, Science Press, 2015 (in Chinese)

Numerical Simulation of Nonlinear Flow Based on Element-Free Galerkin Method

MENG Junnan, PAN Guang, CAO Yonghui, LI Linfeng, LI Zhencen, ZHOU Bing

(Key Laboratory for Unmanned Underwater Vehicle, School of Marine Science and Technology,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: This paper focuses on the studying on some flow problems of nonlinear based on the Element Free Galerkin method. First the Navier-Stokes equation is discretized with the Galerkin method. The inertial term in the equation is discretized with the method of the speed term and direct deduction respectively. And the penalty function

method is used to deal with the pressure and the essential boundary condition in the equation, and the discretization of two-dimensional N-S equation based on the EFG method is established. Then the flow problem of stationary nonlinear is studied. The flow problem of water in the rectangular domain squeezed by the two plates distributed above and below the calculated domain is studied with the method of EFG. The accuracy of the direct linear alternating iteration method is shown by contrast with the analytical solution. Then the flow problem of unsteady nonlinear is studied. The θ -weighted method is used to discrete the time term of the N-S equation and the unsteady nonlinear solution matrix of EFG is established. The flow problem of flow around the square column is studied with the method of EFG and the flows under a series of low Reynolds are stimulated.

Keywords: element-free Galerkin method; penalty function method; Navier-Stokes equation; direct linear alternating iteration method