

# 基于双L型阵列的二维非相干分布源参数估计

武涛<sup>1</sup>, 邓正宏<sup>1</sup>, 徐继伟<sup>1</sup>, 古清月<sup>2</sup>

(1.西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072; 2.西北工业大学 航海学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:**分布源信号可以看作点源信号在一定空间范围内的聚集。研究二维非相干分布源参数估计问题,提出一种基于双L型阵列结构的分布源参数估计方法。通过一阶泰勒展开推导出平行阵列广义方向矢量关于中心方位角和中心俯仰角的旋转不变关系,在此基础上利用接收矢量协方差矩阵的信号子空间得出旋转算子,依据参数配对方法解算出中心方位角和中心俯仰角,二维波达方向的估计不需要谱峰搜索,适用于角功率函数未知和多个分布源的情景。最后通过二维Capon谱峰搜索确定角度扩展参数。通过仿真考察实验条件、扩展角度对估计结果的影响,实验表明所提算法具有良好估计性能。

**关键词:**波达方向;非相干分布源;广义方向矢量;双L型阵列

**中图分类号:** TN911.7

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-2758(2019)04-0838-08

在阵列信号处理中,传统的信源参数估计算法以点目标模型为基础。当目标的空间散射特性可以忽略、目标与接收阵列之间为直线路径,点目标模型可以简化计算,有效进行参数估计。在无线通信领域,目标与接收阵列周围存在较多障碍物,目标到达阵列通过多条路径传播;在水下声呐工作环境中,信号传播存在海底与海面的反射路径,随着目标与接收阵列之间的距离缩短,目标反射信号的各个部位都可以看作散射体,此时信源的参数估计就必须考虑目标的空间分布特征。当信源的空间散射特性不能被忽略时,点目标模型不能有效描述信号源特征,基于点目标模型的信源参数估计也会存在较大误差。

为了克服点目标模型的局限,学者们提出了分布源模型<sup>[1]</sup>。分布源信号可以看作点源信号在一定空间分布内的聚集。分布源依据其散射单元的时间相关性主要分为非相干分布源和相干分布源。非相干分布源和相干分布源的空间分布特征分别用角功率密度函数和角信号分布函数来描述。根据分布源的空间分布特点,角功率密度函数或者角信号分布函数可以表示为多种分布函数,通常有高斯分布、

均匀分布和非对称分布<sup>[2]</sup>。针对分布源模型,学者们提出多种参数估计算法,主要有子空间类算法如DSPE<sup>[1]</sup>和DSPARE<sup>[3]</sup>、协方差匹配算法<sup>[4-5]</sup>、极大似然估计算法<sup>[6-7]</sup>和波束形成算法<sup>[8]</sup>。以上参数估计算法假设分布源与接收阵列处于同一平面即采用一维分布源模型,分布源的角功率密度函数或者角信号分布函数用波达方向或称为中心角以及角度扩展2个参数来描述。分布源与接收阵列处于不同平面即二维分布源模型更具有一般性,此时分布源用波达方向包括中心方位角和中心俯仰角、角度扩展包括方位角扩展和俯仰角扩展来描述,复杂程度显著增加。

对于二维相干分布源模型,代表性的成果为国内学者利用广义方向矢量的泰勒近似得出信号子空间的旋转不变关系,针对不同的阵列结构提出多种参数估计算法<sup>[9-12]</sup>。对于二维非相干分布源模型国内外研究较少。文献[13]提出二维协方差匹配算法,该方法采用四维非线性优化求解二维中心角和角度扩展,计算量巨大。文献[14]利用均匀平面阵提出一种类ESPRIT算法,该算法针对二维非相干分布源求解中心角而没有涉及角度扩展参数。文献

收稿日期:2018-08-10

基金项目:国家自然科学基金(61471299,U1609216)与陕西省重点研发项目(2017ZDXM-GY-139)资助

作者简介:武涛(1984—),西北工业大学博士研究生,主要从事阵列信号处理、目标探测与成像研究。

[15] 利用双平行线阵、三平行线阵和 L 型阵对分布源的低复杂度参数估计做了系统的研究,并针对双平行阵列提出一种非相干分布源中心角估计算法,首先利用旋转不变关系计算出中心俯仰角,利用一维 Capon 谱峰搜索来计算中心方位角,再通过二维 Capon 谱峰搜索来得到扩展参数,计算复杂度也较高。

本文研究二维非相干分布源模型的参数估计。首先针对双 L 型阵列结构特点推导出阵列广义方向矢量关于中心方位角和中心俯仰角的旋转不变关系,在此基础上利用接收矢量协方差矩阵的信号子空间解算出旋转算子,依据 Capon 估计准则提出一种参数配对方法,从而得出中心俯仰角和中心方位角。本文二维波达方向的估计不需要谱峰搜索,适用于角功率函数未知和多个分布源的情景。在中心角已知的基础上,通过 Capon 谱峰搜索确定扩展参数。

### 1 二维非相干分布源模型

双 L 型阵列结构如图 1 所示。阵列由位于  $xoz$  平面的两对平行线阵  $X1$  和  $X2$ 、 $Z1$  和  $Z2$  组成,其中  $X1$  和  $Z1$  分别位于  $x$  轴和  $z$  轴,共有位于原点的第一个阵元。每对平行线阵间的间隔为  $\delta$ ,每条线阵有间距为  $d$  的  $M$  个阵元。

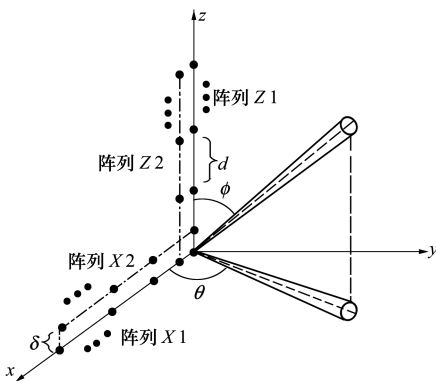


图 1 双 L 型阵列结构

假设远场有  $k$  个窄带二维分布源以中心角为  $(\theta_i, \phi_i)$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) 入射到阵列。其中  $\theta_i$  为第  $i$  个分布源的中心方位角,  $\phi_i$  为第  $i$  个分布源中心俯仰角,  $\theta_i \in [0, \pi]$ ,  $\phi_i \in [0, \pi]$ 。则阵列的接收矢量可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_m(t) = \sum_{i=1}^k \iint \boldsymbol{\alpha}_m(\theta, \phi) s_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi + \mathbf{n}_{xm}(t) \\ \mathbf{z}_m(t) = \sum_{i=1}^k \iint \boldsymbol{\beta}_m(\theta, \phi) s_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi + \mathbf{n}_{zm}(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{n}_{xm}(t)$  与  $\mathbf{n}_{zm}(t)$  为与信号不相关的加性高斯白噪声,噪声功率为  $\sigma_n^2$ 。  $m=1,2$ 。  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$  分别表示阵列  $X1$  和  $X2$  的接收矢量;  $\mathbf{z}_1(t)$  和  $\mathbf{z}_2(t)$  分别为阵列  $Z1$  和  $Z2$  的接收矢量;  $\boldsymbol{\alpha}_1(\theta, \phi)$  和  $\boldsymbol{\alpha}_2(\theta, \phi)$  分别表示点源信号在  $X1$  和  $X2$  的方向矢量;  $\boldsymbol{\beta}_1(\theta, \phi)$  和  $\boldsymbol{\beta}_2(\theta, \phi)$  分别表示点源信号在  $Z1$  和  $Z2$  的方向矢量。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1(\theta, \phi) = [1, e^{j2\pi d \cos\theta \sin\phi/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(M-1)d \cos\theta \sin\phi/\lambda}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2(\theta, \phi) = \boldsymbol{\alpha}_1(\theta, \phi) e^{j2\pi\delta \cos\theta/\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1(\theta, \phi) = [1, e^{j2\pi d \cos\phi/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(M-1)d \cos\phi/\lambda}]^T \\ \boldsymbol{\beta}_2(\theta, \phi) = \boldsymbol{\beta}_1(\theta, \phi) e^{j2\pi\delta \cos\theta \sin\phi/\lambda} \end{cases} \quad (3)$$

$s_i(\theta, \phi, t)$  是第  $i$  个分布源的角信号密度函数,  $s_i(\theta, \phi, t)$  为一随机过程,反应第  $i$  个分布源在  $t$  时刻不同角度上散射分量的贡献。非相干分布源模型假设同一分布源不同角度的散射完全不相干,则存在以下关系

$$\begin{aligned} E[s_i(\theta, \phi, t) s_i(\theta', \phi', t)] &= \\ \sigma_i^2 p_i(\theta, \phi, t) \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\sigma_i^2$  是第  $i$  个分布源的功率,  $p_i(\theta, \phi, t)$  是归一化的角功率密度函数满足以下关系

$$\iint p_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi = 1 \quad (5)$$

### 2 算法原理

#### 2.1 广义方向矢量的旋转不变关系

将阵列  $X1$  和  $X2$  的方向矢量在  $(\theta_i, \phi_i)$  处做一阶泰勒级数展开如下

$$\boldsymbol{\alpha}_1(\theta, \phi) \approx \boldsymbol{\alpha}_1(\theta_i, \phi_i) + [\boldsymbol{\alpha}_1(\theta_i, \phi_i)]'_\theta (\theta - \theta_i) + [\boldsymbol{\alpha}_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi (\phi - \phi_i) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2(\theta, \phi) \approx \boldsymbol{\alpha}_2(\theta_i, \phi_i) + [\boldsymbol{\alpha}_2(\theta_i, \phi_i)]'_\theta (\theta - \theta_i) + [\boldsymbol{\alpha}_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi (\phi - \phi_i) \quad (7)$$

式中,  $[\cdot]'_\theta$  和  $[\cdot]'_\phi$  分别表示函数在  $(\theta_i, \phi_i)$  处关于  $\theta$  和  $\phi$  的一阶偏导数。

$$\begin{cases} \alpha_2(\theta_i, \phi_i) = \alpha_1(\theta_i, \phi_i) e^{j2\pi d \cos \phi_i / \lambda} \\ [\alpha_2(\theta_i, \phi_i)]'_\theta = [\alpha_1(\theta_i, \phi_i)]'_\theta e^{j2\pi d \cos \phi_i / \lambda} \\ [\alpha_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi = [\alpha_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi e^{j2\pi d \cos \phi_i / \lambda} - \\ (j2\pi d \sin \phi_i / \lambda) \alpha_1(\theta_i, \phi_i) e^{j2\pi d \cos \phi_i / \lambda} \end{cases} \quad (8)$$

如果  $d/\lambda \ll 1$ ,  $[\alpha_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi$  的第二项可以忽略不计则存在以下近似关系

$$[\alpha_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi \approx [\alpha_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi e^{j2\pi d \cos \phi_i / \lambda} \quad (9)$$

定义广义信源矢量  $\bar{s} = [\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3]^H$

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = [\rho_{10}, \rho_{20}, \dots, \rho_{k0}] \\ \bar{s}_2 = [\rho_{1\theta}, \rho_{2\theta}, \dots, \rho_{k\theta}] \\ \bar{s}_3 = [\rho_{1\phi}, \rho_{2\phi}, \dots, \rho_{k\phi}] \end{cases} \quad (10)$$

式中

$$\begin{cases} \rho_{i0} = \iint s_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi \\ \rho_{i\theta} = \iint (\theta - \theta_i) s_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi \\ \rho_{i\phi} = \iint (\phi - \phi_i) s_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi \end{cases} \quad (11)$$

可以证明,存在以下关系<sup>[15]</sup>

$$E[\rho_{il}\rho_{in}] = \begin{cases} \sigma_{si}^2 & l = n = 0 \\ \sigma_{si}^2 M_{\theta i} & l = n = \theta \\ \sigma_{si}^2 M_{\phi i} & l = n = \phi \\ 0 & l \neq n \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$M_{\theta i} = \iint (\theta - \theta_i)^2 p_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi \quad (13)$$

$$M_{\phi i} = \iint (\phi - \phi_i)^2 p_i(\theta, \phi, t) d\theta d\phi \quad (14)$$

由于不同的分布源是不相关的,则

$$E[\bar{s}\bar{s}^H] = \text{diag}(\Lambda, \mathbf{M}_\theta \Lambda, \mathbf{M}_\phi \Lambda) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Lambda = \text{diag}(\sigma_{s1}^2, \sigma_{s2}^2, \dots, \sigma_{sq}^2) \\ \mathbf{M}_\theta = \text{diag}(M_{\theta 1}, M_{\theta 2}, \dots, M_{\theta q}) \\ \mathbf{M}_\phi = \text{diag}(M_{\phi 1}, M_{\phi 2}, \dots, M_{\phi q}) \end{cases} \quad (16)$$

定义 X1 阵列的广义方向矢量  $[\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{13}]$  为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11}(\theta, \phi) = [\alpha_1(\theta_1, \phi_1), \alpha_1(\theta_2, \phi_2), \dots, \\ \alpha_1(\theta_k, \phi_k)] \\ \mathbf{A}_{12}(\theta, \phi) = [[\alpha_1(\theta_1, \phi_1)]'_\theta, [\alpha_1(\theta_2, \phi_2)]'_\theta, \dots, \\ [\alpha_1(\theta_k, \phi_k)]'_\theta] \\ \mathbf{A}_{13}(\theta, \phi) = [[\alpha_1(\theta_1, \phi_1)]'_\phi, [\alpha_1(\theta_2, \phi_2)]'_\phi, \dots, \\ [\alpha_1(\theta_k, \phi_k)]'_\phi] \end{cases} \quad (17)$$

则 X1 阵列的接收矢量可以表示为

$$\mathbf{x}_1(t) = [\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{13}] \bar{s} + \mathbf{n}_{x1}(t) \quad (18)$$

定义 X2 阵列的广义方向矢量  $[\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{23}]$  为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{21} = [\alpha_2(\theta_1, \phi_1), \alpha_2(\theta_2, \phi_2), \dots, \alpha_2(\theta_k, \phi_k)] \\ \mathbf{A}_{22} = [[\alpha_2(\theta_1, \phi_1)]'_\theta, [\alpha_2(\theta_2, \phi_2)]'_\theta, \dots, \\ [\alpha_2(\theta_k, \phi_k)]'_\theta] \\ \mathbf{A}_{23} = [[\alpha_2(\theta_1, \phi_1)]'_\phi, [\alpha_2(\theta_2, \phi_2)]'_\phi, \dots, \\ [\alpha_2(\theta_k, \phi_k)]'_\phi] \end{cases} \quad (19)$$

则 X2 阵列的接收矢量可以表示为

$$\mathbf{x}_2(t) = [\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{23}] \bar{s} + \mathbf{n}_{x2}(t) \quad (20)$$

根据(8)~(9)式可以得到如下关系

$$[\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{23}] \approx [\mathbf{A}_{11} \Phi, \mathbf{A}_{12} \Phi, \mathbf{A}_{13} \Phi] \quad (21)$$

式中

$$\Phi = \text{diag}(e^{j2\pi d \cos \phi_1 / \lambda}, e^{j2\pi d \cos \phi_2 / \lambda}, \dots, e^{j2\pi d \cos \phi_k / \lambda}) \quad (22)$$

将阵列 Z1 和 Z2 的方向矢量在  $(\theta_i, \phi_i)$  做一阶泰勒级数展开如下

$$\beta_1(\theta, \phi) \approx \beta_1(\theta_i, \phi_i) + [\beta_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi (\phi - \phi_i) \quad (23)$$

$$\beta_2(\theta, \phi) \approx \beta_2(\theta_i, \phi_i) + [\beta_2(\theta_i, \phi_i)]'_\theta (\theta - \theta_i) + [\beta_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi (\phi - \phi_i) \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} & [\beta_2(\theta_i, \phi_i)]'_\theta = \\ & \beta_1(\theta_i, \phi_i) (-j2\pi d \sin \theta_i \sin \phi_i / \lambda) e^{j2\pi d \cos \theta_i \sin \phi_i / \lambda} \end{aligned} \quad (25)$$

$$[\beta_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi = [\beta_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi e^{j2\pi d \cos \theta_i \sin \phi_i / \lambda} + (j2\pi d \cos \theta_i \cos \phi_i / \lambda) e^{j2\pi d \cos \theta_i \sin \phi_i / \lambda} \beta_1(\theta_i, \phi_i) \quad (26)$$

如果  $d/\lambda \ll 1$ , 则(25)式右端及(26)式第二项可以忽略不计则有如下关系

$$\begin{cases} \beta_2(\theta_i, \phi_i) \approx \beta_1(\theta_i, \phi_i) e^{j2\pi d \cos \theta_i \sin \phi_i / \lambda} \\ [[\beta_2(\theta_i, \phi_i)]'_\phi] \approx [[\beta_1(\theta_i, \phi_i)]'_\phi] e^{j2\pi d \cos \theta_i \sin \phi_i / \lambda} \end{cases} \quad (27)$$

定义 Z1 阵列方向矢量  $[\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}]$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{11} = [\beta_1(\theta_1, \phi_1), \beta_1(\theta_2, \phi_2), \dots, \beta_1(\theta_k, \phi_k)] \\ \mathbf{B}_{12} = [[\beta_1(\theta_1, \phi_1)]'_\phi, [\beta_1(\theta_2, \phi_2)]'_\phi, \dots, \\ [\beta_1(\theta_k, \phi_k)]'_\phi] \end{cases} \quad (28)$$

则 Z1 阵列的接收矢量可以表示为

$$\mathbf{z}_1(t) = [\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}] \bar{s} + \mathbf{n}_{z1}(t) \quad (29)$$

定义 Z2 阵列方向矢量  $[\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}]$  为

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{21} = [\boldsymbol{\beta}_2(\theta_1, \phi_1), \boldsymbol{\beta}_2(\theta_2, \phi_2), \dots, \boldsymbol{\beta}_2(\theta_k, \phi_k)] \\ \mathbf{B}_{22} = [[\boldsymbol{\beta}_2(\theta_1, \phi_1)]'_{\phi}, [\boldsymbol{\beta}_2(\theta_2, \phi_2)]'_{\phi}, \dots, \\ [\boldsymbol{\beta}_2(\theta_k, \phi_k)]'_{\phi}] \end{cases} \quad (30)$$

Z2 阵列的接收矢量可以表示为

$$\mathbf{z}_2(t) = [\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}] \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{n}_{z2}(t) \quad (31)$$

根据 (27) 式得出以下关系

$$[\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}] \approx [\mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\Psi}, \mathbf{B}_{12} \boldsymbol{\Psi}] \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}(e^{j2\pi\delta\cos\theta_1\sin\phi_1/\lambda}, e^{j2\pi\delta\cos\theta_2\sin\phi_2/\lambda}, \dots, e^{j2\pi\delta\cos\theta_k\sin\phi_k/\lambda}) \quad (33)$$

### 2.2 中心角参数估计

将 X1 和 X2 阵列的接收矢量合并如下

$$\mathbf{x}_{12}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}] \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{n}_x(t) \quad (34)$$

式中

$$[\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{n}_x(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{x1}(t) \\ \mathbf{n}_{x2}(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

X1 和 X2 阵列的接收矢量协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_x^{12} = E[\mathbf{x}_{12}(t)\mathbf{x}_{12}^H(t)] \quad (37)$$

在小角度扩展的条件下,  $M_{\theta_i}$  和  $M_{\phi_i}$  都是小于 1 的数,对协方差矩阵  $\mathbf{R}_x^{12}$  进行特征分解,得到协方差矩阵最大的  $k$  个特征值对应的特征向量构成的子空间  $\mathbf{E}_x$ 。 $\mathbf{E}_x$  子空间与  $\mathbf{A}_{x1}$  张成的子空间相同,则存在一个  $k \times k$  非奇异矩阵  $\mathbf{T}$  满足以下关系

$$\mathbf{E}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{11} \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (38)$$

令  $\mathbf{E}_{x1}$  和  $\mathbf{E}_{x2}$  分别为  $\mathbf{E}_x$  的上  $k$  行和下  $k$  行则有

$$\mathbf{E}_{x1} = \mathbf{A}_{11} \mathbf{T} \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_{x2} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{T} \quad (40)$$

可以得到以下关系

$$\mathbf{E}_{x2} = \mathbf{E}_{x1} \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} \quad (41)$$

定义  $\boldsymbol{\Omega}_x = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T}$  则

$$\boldsymbol{\Omega}_x = \mathbf{E}_{x1}^+ \mathbf{E}_{x2} \quad (42)$$

其中  $(\cdot)^+$  表示伪逆算子,从而可以求解出分布源的中心俯仰角

$$\phi_i = \arccos \frac{\text{angle}(\eta_i)}{2\pi\delta/\lambda} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (43)$$

式中,  $\eta_i$  为  $\boldsymbol{\Omega}_x$  第  $i$  个特征值。angle( $\cdot$ ) 表示取复变

量的辐角。

将 Z1 和 Z2 阵列的接收矢量合并如下

$$\mathbf{z}_{12}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{z1}, \mathbf{B}_{z2}] \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{n}_z(t) \quad (44)$$

式中

$$[\mathbf{B}_{z1}, \mathbf{B}_{z2}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{n}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{z1}(t) \\ \mathbf{n}_{z2}(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Z1 和 Z2 阵列的接收矢量协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_z^{12} = E[\mathbf{z}_{12}(t)\mathbf{z}_{12}^H(t)] \quad (47)$$

对协方差矩阵  $\mathbf{R}_z^{12}$  进行特征分解,得到与协方差矩阵最大的  $k$  个特征值对应的特征向量构成的子空间  $\mathbf{E}_z$ 。 $\mathbf{E}_z$  子空间与  $\mathbf{B}_{z1}$  张成的子空间相同,则存在一个  $k \times k$  个的非奇异矩阵  $\mathbf{Q}$  满足以下关系

$$\mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{11} \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (48)$$

令  $\mathbf{E}_{z1}$  和  $\mathbf{E}_{z2}$  分别为  $\mathbf{E}_z$  的上  $k$  行和下  $k$  行则有以下关系

$$\mathbf{E}_{z1} = \mathbf{B}_{11} \mathbf{Q} \quad (49)$$

$$\mathbf{E}_{z2} = \mathbf{B}_{21} \mathbf{Q} \quad (50)$$

进一步可以得到

$$\mathbf{E}_{z2} = \mathbf{E}_{z1} \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Q} \quad (51)$$

定义  $\boldsymbol{\Omega}_z = \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Q}$  则

$$\boldsymbol{\Omega}_z = \mathbf{E}_{z1}^+ \mathbf{E}_{z2} \quad (52)$$

进而得出

$$\theta_i = \arccos \frac{\text{angle}(\mu_i)}{2\pi\delta/\lambda \sin\phi_i} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (53)$$

式中,  $\mu_i$  为  $\boldsymbol{\Omega}_z$  第  $i$  个特征值。

### 2.3 角度配对

考虑平行阵列 X1 和 X2 的广义方向矢量  $[\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}]$ , Capon 估计准则可以表示为

$$\min \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x^{12} \mathbf{w} \quad \text{subject to } \mathbf{w}^H [\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}] = 1 \quad (54)$$

(54) 式可以通过拉格朗日函数进行求解,得出 Capon 代价函数为

$$L(\theta, \phi) = \frac{1}{\| [\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}]^H (\hat{\mathbf{R}}_x^{12})^{-1} [\mathbf{A}_{x1}, \mathbf{A}_{x2}, \mathbf{A}_{x3}] \|_F} \quad (55)$$

式中,  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}$  为平行阵列 X1 和 X2 的协方差矩阵估计值

$$\hat{\mathbf{R}}_x^{12} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_{12}(t) \mathbf{x}_{12}^H(t) \quad (56)$$

角度配对的步骤可以归纳如下

1) 从集合  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$  任选一  $\hat{\phi}_i$ , 遍历集合  $\{\text{angle}(\mu_1), \text{angle}(\mu_2), \dots, \text{angle}(\mu_k)\}$  依据 (53) 式求解出  $k$  个与  $\hat{\phi}_i$  的角度配对  $(\theta_j, \hat{\phi}_i) (j = 1, 2, \dots, k)$ 。

2) 将  $(\theta_j, \hat{\phi}_i) (j = 1, 2, \dots, k)$  带入(55) 式选择使  $L(\theta, \phi)$  最大的  $\theta_j$  为  $\hat{\phi}_i$  的配对, 记为  $\hat{\theta}_i$ 。

3) 将  $\hat{\phi}_i$  从集合  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$  剔除, 同时将  $2\pi\delta/\lambda \cos\hat{\theta}_i \sin\hat{\phi}_i$  从集合  $\{\text{angle}(\mu_1), \text{angle}(\mu_2), \dots, \text{angle}(\mu_k)\}$  剔除, 重复步骤 1 ~ 步骤 2。

经过  $(k + 2)(k - 1)/2$  次计算就可以配对出所有的中心方位角和中心俯仰角。

### 2.4 扩展参数估计

考虑阵列  $X_1$ , 信号协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}(\theta, \phi; \mathbf{u}_i) = \iint p(\theta, \phi; \mathbf{u}_i) \boldsymbol{\alpha}_1(\theta, \phi) \boldsymbol{\alpha}_1^H(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (57)$$

对于高斯分布

$$p(\theta, \phi; \mathbf{u}_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\theta_i}\sigma_{\phi_i}} \exp\left\{-0.5 \left[ \left(\frac{\theta - \theta_i}{\sigma_{\theta_i}}\right)^2 + \left(\frac{\phi - \phi_i}{\sigma_{\phi_i}}\right)^2 \right]\right\} \quad (58)$$

式中,  $\mathbf{u}_i = [\theta_i, \phi_i, \sigma_{\theta_i}, \sigma_{\phi_i}]$ , 假设  $d/\lambda = 0.5$  且在小角度扩展的前提下有

$$[\mathbf{R}(\theta, \phi; \mathbf{u}_i)]_{lh} = e^{j\pi(l-h)\cos\theta_i\sin\phi_i} \cdot \mathbf{C} \quad (59)$$

式中,  $[\cdot]_{lh}$  表示矩阵第  $l$  行  $h$  列的元素。

$$\mathbf{C} = e^{-0.5[\pi\sigma_{\theta_i}(l-h)\sin\theta_i\sin\phi_i]^2 + [\pi\sigma_{\phi_i}(l-h)\cos\theta_i\cos\phi_i]^2} \quad (60)$$

对于均匀分布

$$p(\theta, \phi; \mathbf{u}_i) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma_{\theta_i}\sigma_{\phi_i}} & |\theta - \theta_i| \leq \sigma_{\theta_i} \text{ 且 } |\phi - \phi_i| \leq \sigma_{\phi_i} \\ 0 & |\theta - \theta_i| \geq \sigma_{\theta_i} \text{ or } |\phi - \phi_i| \geq \sigma_{\phi_i} \end{cases} \quad (61)$$

$$[\mathbf{R}(\theta, \phi; \mathbf{u}_i)]_{lh} = e^{j\pi(l-h)\cos\theta_i\sin\phi_i} \cdot \mathbf{D} \quad (62)$$

$$\mathbf{D} =$$

$$\frac{\sin[\pi\sigma_{\phi_i}(l-h)\cos\theta_i\cos\phi_i] \cdot \sin[\pi\sigma_{\theta_i}(l-h)\sin\theta_i\sin\phi_i]}{\pi\sigma_{\phi_i}(l-h)\cos\theta_i\cos\phi_i \cdot \pi\sigma_{\theta_i}(l-h)\sin\theta_i\sin\phi_i} \quad (63)$$

方位角扩展和俯仰角扩展可以采用 Capon 估计准则通过二维谱峰搜索得出

$$(\hat{\sigma}_\theta, \hat{\sigma}_\phi) = \operatorname{argmax} \frac{1}{\sigma_{\max}\{(\hat{\mathbf{R}}_x^1)^{-1}\mathbf{R}(\theta, \phi; \mathbf{u}_i)\}} \quad (64)$$

式中,  $\hat{\mathbf{R}}_x^1 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_1^H(t)$ ,  $\sigma_{\max}\{\cdot\}$  表示矩阵的最大特征值。

### 2.5 算法步骤和复杂度分析

根据上述分析, 本文算法步骤归纳如下

1) 计算协方差矩阵的估计值  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}, \hat{\mathbf{R}}_z^{12}$ 。

2) 对  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}, \hat{\mathbf{R}}_z^{12}$  进行特征分解得出子空间  $\mathbf{E}_x$  和  $\mathbf{E}_z$ , 根据(42)、(52) 式计算得出  $\boldsymbol{\Omega}_x$  和  $\boldsymbol{\Omega}_z$ 。

3) 对  $\boldsymbol{\Omega}_x$  和  $\boldsymbol{\Omega}_z$  进行特征分解得出特征值  $\eta_i$  和  $\mu_i$ 。

4) 依据参数配对方法确定中心角度  $\hat{\theta}_i$  和  $\hat{\phi}_i$ 。

5) 依据(59) 式、(60) 式或者(62) 式、(63) 式确定  $\mathbf{R}(\theta, \phi; \mathbf{u}_i)$ , 根据(64) 式得出扩展参数  $\hat{\sigma}_{\theta_i}$  和  $\hat{\sigma}_{\phi_i}$ 。

本文算法求解中心角复杂度主要包括三部分:

- ① 计算协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}$  和  $\hat{\mathbf{R}}_z^{12}$ , 复杂度为  $O(NM^2)$ ;
  - ② 特征分解  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}$  和  $\hat{\mathbf{R}}_z^{12}$ , 复杂度为  $O(M^3)$ ;
  - ③ 求解及特征分解  $\boldsymbol{\Omega}_x$  和  $\boldsymbol{\Omega}_z$ , 复杂度为  $O(k^3)$ ;
- 文献[15] 提出的双平行线的估计方法复杂度包括三部分: ① 计算协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}$  复杂度为  $O(NM^2)$ ; ② 特征分解  $\hat{\mathbf{R}}_x^{12}$  复杂度为  $O(M^3)$ 。③ 一维搜索复杂度为  $O(kL_\theta M^2)$ , 其中  $L_\theta$  为方位角的搜索点数。显然, 本文提出的算法复杂度低于文献[15]。在得出中心角的基础上求解扩展参数的计算复杂度主要包括两部分: ① 协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_x^1$  求逆, 复杂度为  $o(M^3)$ ; ② 通过二维搜索得出扩展参数, 复杂度为  $o(kM^3 L_{\sigma_\theta} L_{\sigma_\phi})$ ,  $L_{\sigma_\theta}$  和  $L_{\sigma_\phi}$  为方位角扩展和俯仰角扩展搜索的点数。

### 3 仿真实验与分析

本文通过 3 个仿真实验来验证算法的有效性, 考虑阵列结构如图 1 所示, 每条线阵阵元数  $M = 8$ , 阵元间距  $d = \lambda/2$ , 平行阵列间隔  $\delta = \lambda/10$ 。

中心角的均方根误差的  $G_a$  定义为

$$G_a = \sqrt{\frac{1}{M_c} \sum_{\zeta} (\hat{\theta}^\zeta - \theta)^2 + \frac{1}{M_c} \sum_{\zeta} (\hat{\phi}^\zeta - \phi)^2} \quad (65)$$

$M_c$  为蒙特卡罗仿真次数,  $\hat{\theta}^\zeta$  和  $\hat{\phi}^\zeta$  表示第  $\zeta$  次蒙特卡罗仿真实验估计的中心方位角和中心俯仰角。角度扩展的均方根误差  $G_s$  定义为

$$G_s = \sqrt{\frac{1}{M_c} \sum_{\zeta} (\hat{\theta}^\zeta - \sigma_\theta)^2 + \frac{1}{M_c} \sum_{\zeta} (\hat{\phi}^\zeta - \sigma_\phi)^2} \quad (66)$$

$\hat{\theta}^\zeta$  和  $\hat{\phi}^\zeta$  表示第  $\zeta$  次蒙特卡罗仿真实验估计的方位角扩展和俯仰角扩展。

**实验 1** 考察信噪比和快拍数对实验的影响。假设目标参数为  $[30^\circ, 45^\circ, 2^\circ, 3^\circ]$  的二维非相干高斯分布源信号。实验采用 100 次独立的蒙特卡罗仿真验证完成。图 2 反应快拍数等于 200 时中心角均方根误差和角度扩展均方根误差随信噪比从 0~30 dB 的变化情况。图 3 反应信噪比等于 20 dB 时中心角均方根误差和角度扩展均方根误差随快拍数从 20~200 的变化情况。为了验证算法的性能,图中还给出采用文献[15]的方法利用双平行线 X1 和 X2 得出的结果。可以看到随着快拍数和信噪比的提高

算法估计精度不断提高,本文算法在相同实验条件下的估计精度优于文献[15]提出的算法。

**实验 2** 考察角度扩展的变化对中心角估计的影响。针对中心角度为  $(60^\circ, 35^\circ)$  一个非相干二维分布源,分别考虑 2 种角功率密度函数:高斯分布和均匀分布。考察方位角扩展和俯仰角扩展同时从  $0^\circ$  变化到  $10^\circ$  时中心角均方根误差的变化。实验采用 100 次独立的蒙特卡罗仿真验证完成,信噪比为 20 dB,快拍数为 200。图 4 表明对于角功率密度函数为高斯分布的分布源,随着角度扩展的增加估计精度会降低,角度扩展为  $5^\circ$  时,中心角均方根误差为 0.03;角度扩展达为  $10^\circ$  时误差为 0.4。对于均匀分布的分布源,随着角度扩展的增加估计精度同样降低,角度扩展为  $5^\circ$  时,中心角均方根误差为 0.04,  $10^\circ$  时误差为 0.7。实验表明随着角度扩展的增加估计性能会下降,但是在  $10^\circ$  以内仍具有满意的估计效果。本文提出的算法中心角度的估计在小角度扩展的情况下具有鲁棒性。

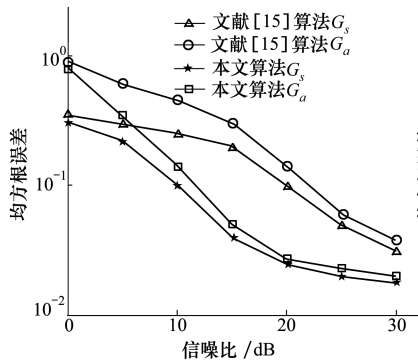


图 2 分布源参数均方根误差随着信噪比的变化

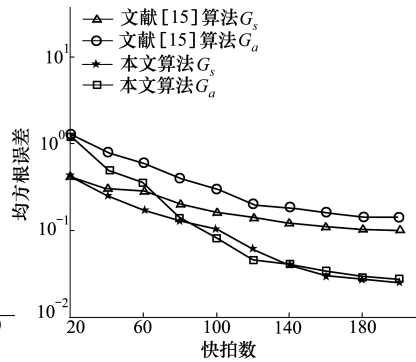


图 3 分布源参数均方根误差随着快拍数的变化

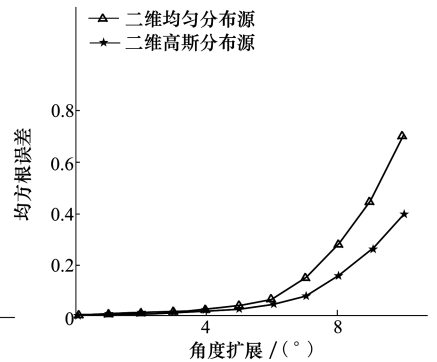


图 4 中心角均方根误差随着角度扩展的变化

**实验 3** 考察算法对多个分布源的估计能力。考虑参数为  $[25^\circ, 70^\circ, 2^\circ, 3^\circ]$ ,  $[35^\circ, 40^\circ, 3.5^\circ, 4.5^\circ]$  和  $[55^\circ, 80^\circ, 1.5^\circ, 2^\circ]$  的 3 个均匀非相干二维分布源,信噪比为 20 dB,快拍数为 200。实验采用 100 次独立的蒙特卡罗仿真完成。图 5 和图 6 分别给出 3 个均匀分布源中心角和角度扩展估的结果。实验结果表明本文算法可以有效估计多个分布源的参数。

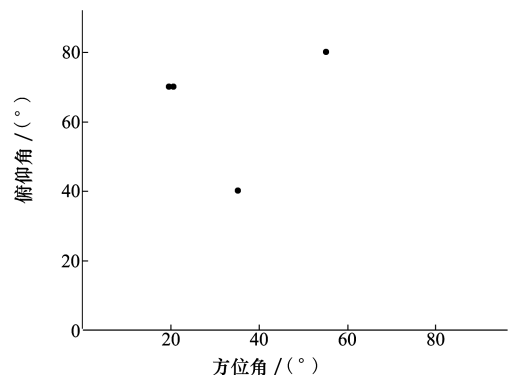


图 5 3 个分布源中心角估计的结果

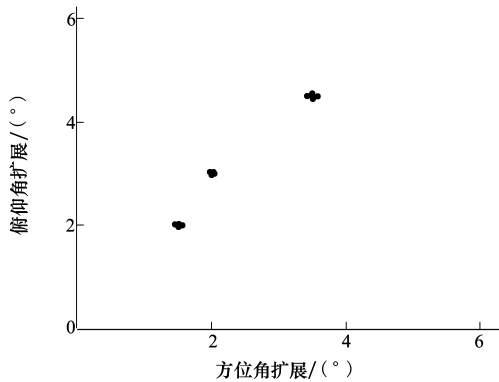


图 6 3 个分布源扩展参数估计的结果

需要说明的是本文旋转不变关系的得出是建立在假设平行线阵间隔很小,与信号波长之比远小于 1 即  $\delta/\lambda \ll 1$  的条件之上。在工程实际中如果阵元间距很小,一方面阵元间的互耦效应将不能被忽略;另一方面,阵元的安装误差也会影响估计效果,所以

在一些高频信号领域如移动通信很难适用。但是在低频水下探测领域,声纳的探测频率可以降到 100 Hz,这意味着信号波长可以达到 14.5 m;在这种情况下, $\delta/\lambda$  实际上可以达到很小的值,完全可以满足假设条件。

## 4 结 论

本文利用双 L 型阵列,提出一种二维非相干分布源参数估计方法。首先推导出广义方向矢量关于中心角的在双 L 型阵列下的旋转不变关系,在协方差矩阵特征分解的基础上计算得出旋转算子,参数配对后解出中心角。在中心角已知的基础上通过二维搜索得出角度扩展参数。仿真结果表明,在平行线阵间隔很小的条件下,本文提出的参数估计方法具有良好的估计性能。

## 参考文献:

- [1] XIONG W, JOSÉ P, SYLVIE M. Performance Analysis of Distributed Source Parameter Estimator(DSPE) in the Presence of Modeling Errors Due to the Spatial Distributions of Sources[J]. Signal Processing, 2018, 143:146-151
- [2] WU T, DENG Z H, GU Q Y. Estimation for Two-Dimensional Nonsymmetric Coherently Distributed Source in L-Shaped Arrays [EB/OL]. (2018-09-03) [2019-04-21]. <https://www.hindawi.com/journals/ijap/2018/5247919/>.
- [3] MENG Y, STOICA P. Estimation of Direction of Arrival of Spatially Dispersed Signals in Array Processing [J]. IEE Proceedings-Radar Sonar and Navigation, 1995, 143(1): 1-9
- [4] BESSON O, STOICA P. Decoupled Estimation of DOA and Angular Spread for a Spatially Distributed Source[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(7): 1872-1882
- [5] SHAHBAZPANAH S, VALAEE S, GERSHMAN A B. A Covariance Fitting Approach to Parametric Localization of Multiple Incoherently Distributed Sources[M]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 32(3): 592-600
- [6] RAICH R, GOLDBERG J, MESSER H. Bearing Estimation for a Distributed Source: Modeling, Inherent Accuracy Limitations and Algorithms[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(2): 429-441
- [7] BESSON O, VINCENT F, STOICA P, et al. Approximate Maximum Likelihood Estimators for Array Processing in Multiplicative Noise Environments[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(9): 2506-2518
- [8] ZOUBIR A, WANG Y. Robust Generalised Capon Algorithm for Estimating the Angular Parameters of Multiple Incoherently Distributed Sources[J]. IET Signal Processing, 2008, 2(2): 163-168
- [9] DAI Z, CUI W, BA B. Two-Dimensional DOA Estimation for Coherently Distributed Sources with Symmetric Properties in Crossed Arrays[EB/OL]. (2017-07-06) [2019-03-01]. <https://www.mdpi.com/1424-8220/17/6/1300>
- [10] WEN C, SHI G, XIE X. Estimation of Directions of Arrival of Multiple Distributed Sources for Nested Array[J]. Signal Processing, 2017, 130: 315-322
- [11] YANG X, ZHENG Z, CHI C K. Low-Complexity 2D Parameter Estimation of Coherently Distributed Noncircular Signals Using Modified Propagator[J]. Multidimensional Systems & Signal Processing, 2017, 28(2): 407-426
- [12] WAN L, HAN G, JIANG J. A DOA Estimation Approach for Transmission Performance Guarantee in D2D Communication[J]. Mobile Networks & Applications, 2017, 22(6): 998-1009
- [13] BOUJEMAA H. Extension of COMET Algorithm to Multiple Diffuse Source Localization in Azimuth and Elevation[J]. Trans on

Emerging Telecommunications Technologies, 2005, 16(6): 557-566

- [14] WU T, DENG Z H, LI Y W. Two-Dimensional DOA Estimation for Incoherently Distributed Sources with Uniform Rectangular Arrays[EB/OL]. (2018-10-23)[2019-04-12]. <https://www.mdpi.com/1424-8220/18/11/3600>
- [15] 郑植. 分布式信源低复杂度参数估计算法研究[D]. 成都:电子科技大学, 2011
- ZHENG Zhi. Study on Low-Complexity Parameter Estimation Method for Distributed Sources[D]. Chengdu, University of Electronic Science and Technology of China, 2011 (in Chinese)

## Estimation for Two-Dimensional Incoherently Distributed Source in Double L-Shape Arrays

WU Tao<sup>1</sup>, DENG Zhenghong<sup>1</sup>, XU Jiwei<sup>1</sup>, GU Qingyue<sup>2</sup>

(1.School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;  
2.School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Distributed sources can be regarded as an assembly of point sources within a spatial distribution. In this paper, we explore the estimation of the two-dimensional incoherently distributed sources using double L-shape arrays. The rotational invariance properties of the nominal elevation and nominal elevation are firstly obtained by taking first-order Taylor series expansions with regard to the generalized steering vectors of two pairs of parallel subarrays. The rotation operators can be solved based on signal subspace. Then the nominal elevation and nominal elevation can be obtained from parameters matching method. Estimation of direction of arrival can be used in multi-source scenario and needn't peak-finding search. Lastly the angular spreads can be solved through two-dimensional Capon search based on nominal angles. The simulation experiments show that the proposed method has good performance on the estimation of two-dimensional incoherently distributed sources. Investigating different experimental conditions, sources with different angular spreads, simulations are conducted to validate better estimation accuracy of the proposed method.

**Keywords:** direction of arrival; incoherently distributed sources; generalized steering vectors; double L-shape arrays