https://doi.org/10.1051/jnwpu/20193761165

基于对数四元数的工业机器人 Hermite 样条曲线姿态插值

普亚松[1,2], 史耀耀[1], 蔺小军[1], 郭剑[1]

(1.西北工业大学 现代设计与集成制造技术实验室, 陕西 西安 710072; 2.红河学院 工学院, 云南 蒙自 661100)

摘 要: 平滑的姿态规划对工业机器人工作质量、使用寿命有着重要的影响。以对数四元数为基础,提出一种从笛卡尔空间样条曲线映射到四元数空间的方法,从而实现四元数多姿态平滑插值。结合相关算例,详细介绍了笛卡尔空间 Hermite 样条曲线映射到时四元数空间的多姿态插值方法与步骤,验证了该方法进行四元数多姿态插值的合理性。提出的四元数多姿态平滑插值具有构造方法简单、易于实现、直观易理解的特点。该方法除了适用于 Hermite 样条曲线的四元数多姿态插值,还可延伸到贝赛尔曲线、B 样条曲线等样条曲线上。

关 键 词: 工业机器人;多姿态插值;对数四元数;样条曲线;平滑插值

中图分类号: TP241.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-2758(2019)06-1165-09

工业机器人末端执行器在工作空间的运动轨迹规划是一项重要的内容,为了确保工业机器人工作质量和延长使用寿命,需进行平滑无冲击的运动轨迹规划。工业机器人运动轨迹分为位移规划和姿态规划,姿态规划往往比位移规划复杂得多[1],本文的研究围绕着工业机器人的姿态规划而进行。

刚体运动姿态的表示方法主要有旋转矩阵、欧拉角和四元数。采用四元数描述姿态主要有如下优点:1)避免出现转动时万向节锁死现象;2)运算效率更高;3)便于提供平滑插值。因为其显著的特点,四元数目前已广泛应用于旋转的场合。四元数描述姿态也有其不利因素,四元数属于 SO(3)旋转空间,是四维向量,因此笛卡尔空间的三维向量的运算不适合四元数,三维向量空间诸多的插值理论不能直接用于四元数姿态插值。在旋转群空间下,单独利用现有的姿态插补方法并不能够较好地实现多姿态平滑插补,给四元数姿态插值带来一定困难[2],因此,许多相关学者围绕着简洁有效的四元数姿态平滑插值进行大量研究工作。

广泛应用的四元数姿态插值是 Shoemake 首次提出的球面线性插值 SLERP,其推理过程简洁,应用简便快捷,成熟应用于 2 个姿态之间的插值。但 SLERP 对 2 个以上姿态进行插值时,只能保证 C^0 连续,在分段点处会出现尖点,导致插值不平滑,因此,球面线性插值 SLERP 不适合多姿态平滑插值。

为了进行 2 个以上的四元数多姿态平滑插值,Shoemake 在球面线性插值 SLERP 的基础上提出球面立体插值 SQUAD,但该方法只能保证插值姿态曲线一阶连续性[3],仍不能满足机器人多姿态轨迹高阶平滑插值的需求。虽然该方法推导与应用稍显复杂,但也仍是一个较为成熟的算法。

为了进一步提高多姿态轨迹曲线的平滑性,有学者将四元数样条曲线引入姿态插值中。Kim 等首次提出可以高阶可导的四元数样条曲线[4],它由笛卡尔空间下的样条曲线衍生而来,并保留了样条曲线的大部分几何特性。该方法提出样条曲线的累和基函数概念,姿态插补以样条曲线的累和基函数作为四元数的指数进行运算,一方面累和基函数较复杂,另一方面四元数是属于旋转空间,四元数的指数运算较繁锁,给插值运算带来一定的难度。再有,用贝赛尔、B-spline 四元数样条曲线姿态插值时,构造过程中需要反算单位四元数曲线的控制顶点,但由

收稿日期: 2018-12-25 **基金项目:** 国家科技重大专项(2015ZX04001003)资助

作者简介: 普亚松(1976—),西北工业大学博士研究生,主要从事工业机器人抛光、机械 CAD/CAM 研究。

于单位四元数曲线是在非欧氏空间生成,所求其控制顶点需要解非线性方程组,因此只能够近似求解得出曲线控制点的数值解[5]。

Ge 等[6]提出了构造二阶连续的单位四元数 B-spline 曲线算法,虽然构造过程中相关约束方程是非线性的,然而给出了 2 个额外四元数计算法则可获得精确单位四元数控制顶点。不足之处是该方法计算比较复杂,而且单位四元数型值点局限于某种给定的约束条件。Miura 等[7]提出了四元数样条曲线的积分曲线,该曲线具有简单的曲率表达形式。这两种方法都需要复杂的数值积分和大量的迭代运算[8],不利于工业机器人高效运作。

邢燕等[9]提出一种快速生成单位四元数插值样条曲线,通过选择适当的四次多项式调配函数,然后通过累和基函数作指数,代表关键帧方向的单位四元数为底的指数函数的连乘形式把欧氏空间中的样条曲线推广到单位四元数空间 S^3 中,该方法不需要反求控制点,但插值曲线的光顺不如 B 样条曲线。

虽然存在大量单位四元数曲线构造方法,仍然很难判断某个方法比其他方法更好,至今也没有完美的解决方案[10],相关研究人员一直努力朝着这个方向研究探索。本文旨在寻求一种简洁有效的四元数多姿态平滑插值的方法。

1 四元数与姿态

1.1 四元数运算与性质

四元数一般表示方法为 $q = w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,也可写成 $\boldsymbol{q} = [w,(x,y,z)] = [w,\boldsymbol{v}]$,$w$ 称为四元数的实部,$\boldsymbol{v}$ 称为四元数的虚部或复数部。四元数 $\boldsymbol{q}$ 实部为零,即 $w = 0$,$\boldsymbol{q} = [0,(x,y,z)]$ 时,称 $\boldsymbol{q}$ 为纯四元数。当四元数 $\boldsymbol{q}$ 的模等于 1 时,即 $\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1$,称 $\boldsymbol{q}$ 为单位四元数。一般情况下,用来表示旋转的四元数就是指单位四元数。当四元数 $\boldsymbol{q}$ 的虚部 $\boldsymbol{v}$ 为相反数时,称为共轭四元数,表示为 $\boldsymbol{q}^*$,$\boldsymbol{q}^* = [w,(-x,-y,-z)] = [w,-\boldsymbol{v}]$。四元数的逆用 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 表示,四元数 $\boldsymbol{q}$ 乘于其逆 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 等于 $[1,0,0,0]$,即 $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1} = [1,0,0,0]$。对于单位四元数而言,其逆等于其共轭,即 $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*$。

任意 2 个四元数:$\boldsymbol{p} = [p_0,\boldsymbol{u}]$,$\boldsymbol{q} = [q_0,\boldsymbol{v}]$,其乘法可表示为

$$\boldsymbol{pq} = p_0q_0 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + p_0\boldsymbol{v} + q_0\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \tag{1}$$

从(1)式中可以看出,四元数的乘法较复杂,四元数是四维向量,其运算不能直接运用三维向量的运算方法。当这 2 个四元数是纯四元数,即 $p_0 = q_0 = 0$,公式(1)可简化为

$$\boldsymbol{pq} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \tag{2}$$

单位四元数还可用转角与转轴矢量表示

$$\boldsymbol{q} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(a,b,c)\right] = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\boldsymbol{n}\right] \tag{3}$$

式中,θ 为转角,$\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ 为转轴矢量,也即转轴在笛卡尔空间的坐标位置。刚体上任一点 $\boldsymbol{s}_1 = (x_1,y_1,z_1)$,如图 1 所示,可对应写为纯四元数 $\boldsymbol{S}_1 = [0,(x_1,y_1,z_1)]$,绕转轴 $\boldsymbol{n}$ 转动 θ 角之后变化到新的位置点 $\boldsymbol{s}_2 = (x_2,y_2,z_2)$,该点可对应写为纯四元数 $\boldsymbol{S}_2 = [0,(x_2,y_2,z_2)]$,该质点转动前后的坐标关系用四元数数学方程描述为:$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{q}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{q}^{-1}$。四元数物理意义明显,一个四元数对应一个转动。

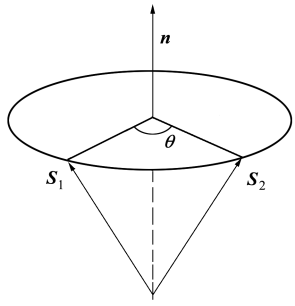

图 1 质点矢量旋转

1.2 姿态描述

当刚体发生转动时,不仅是刚体上质点的位置矢量发生变化,并且整个刚体的方位朝向也发生了变化。假设刚体质心固连着一个坐标系 $oxyz$,该固连坐标系在没有转动之前与参考坐标系(即绝对坐标系)$OXYZ$ 方位朝向是相同的,如图 2 所示。

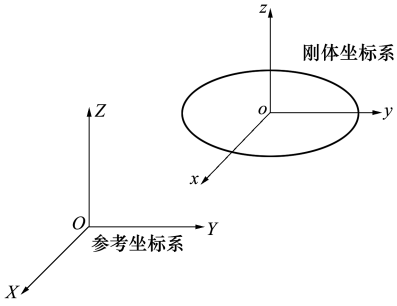

图 2 刚体固连坐标系初始位置

当刚体发生转动时,坐标系方位朝向就不再与参考坐标系重合了,也即姿态发生了改变。参考坐标系 $OXYZ$ 称为静坐标系,刚体上固连坐标系 $oxyz$ 称为动坐标系,动坐标系与静坐标系之间的方位关系称为姿态,如图 3 所示。

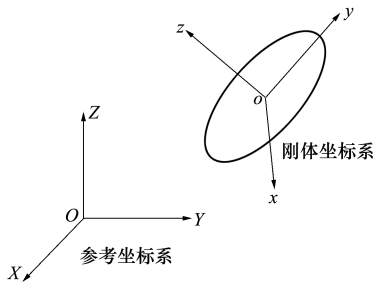

图 3　刚体固连坐标系转动之后的姿态

姿态一般可采用下面 3 种方法表示:

1) 刚体姿态采用变换矩阵表示

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中,(n_x,n_y,n_z) 是动坐标系的 x 坐标轴相对于参考坐标系 $OXYZ$ 的 3 个方向余弦,同理,(o_x,o_y,o_z) 是 y 坐标轴相对于参考坐标系的3个方向余弦,(a_x,a_y,a_z) 是 z 坐标轴相对参考坐标系的 3 个方向余弦。变换矩阵表示刚体姿态时,需要 9 个元素,运算效率低,而且不便于进行姿态平滑插值。

2) 欧拉角表示刚体姿态。刚体绕着动坐标系下坐标轴的转动广泛地称为欧拉角,欧拉角转动顺序不可逆,例如,刚体欧拉角绕动坐标系轴的转动顺序为 $\alpha_x\rightarrow\beta_y\rightarrow\gamma_z$,如果转动的次序发生改变,虽然欧拉角没有变,但得到的最终姿态是不相同的。无论怎么样的转动次序,当第二个转动角为 ±90° 时[11],会出现的“Gimbal Lock”现象,刚体失去一个自由度,将不按预期的路径运动,称为万向节锁死现象,因此欧拉角进行姿态插值时,如何避免万向节锁死是个难点。

3) 四元数表示刚体姿态。如前面所述,一个四元数就意味着一个转角及转轴矢量,一个四元数其物理意义就是代表着一个转动,所以四元数显然可以用来描述刚体姿态。四元数,只需要 4 个元素,运算速度快,并且不会出现万向节锁死现象。采用四元数进行姿态插值优势明显,但四元数也有其弱点,因为四元数是四维向量,不能直观地在笛卡尔空间中表现出来,并且三维向量的运算法则与插值法则不能直接运用在四元数上,因而给四元数姿态插值带来一定的难度。

2　基于对数四元数的样条曲线姿态插值原理

2.1　对数四元数插值原理

如前所述,四元数是四维向量,三维向量的插值方法以及平滑的三维样条曲线不能直接用于四元数插值,需要进行处理。

如公式(3)所示,任一个四元数 $\boldsymbol{q}$,可表示为:$\boldsymbol{q}=[\cos(\theta/2),\sin(\theta/2)\cdot\boldsymbol{n}]$,其中,$\theta$ 为转角,$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ 为转轴矢量。式中四元数代入运算的角度值是转角 θ 的一半,即带入式中计算的角度值为 $\theta/2$。不难证明对于单位四元数 q,其对应的转轴矢量 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量,即转轴矢量的模为 1,$\|\boldsymbol{n}\|=1$。

对于一个单位平面复数 $F=A+B\mathrm{i}$,其模 $\|F\|=1$,幅角 $\phi=\arctan(B/A)$,可把该单位复数写成指数形式 $F=\mathrm{e}^{\phi\mathrm{i}}$。四元数是比平面复数更复杂的复数,同样的道理,也可以把单位四元数 q 相应写成指数形式

$$\boldsymbol{q}=\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\boldsymbol{n}\right]=\mathrm{e}^{\theta\boldsymbol{n}} \tag{5}$$

当对(5)式两边取对数,得到

$$\ln\boldsymbol{q}=\ln(\mathrm{e}^{\theta\boldsymbol{n}})=\theta\boldsymbol{n}=\theta\cdot(a,b,c)=(X,Y,Z)=\boldsymbol{P} \tag{6}$$

从(6)式中可以看出,四维四元数 $\boldsymbol{q}$ 取对数之后转换为笛卡尔空间的三维坐标点 $\boldsymbol{P}$,可进行相应的插值。给定起始姿态 q_s 与结束姿态 q_e,根据(6)式可得到三维空间起始点 P_s 与结束点 P_e,这时就可以运用三维空间的各种插值方法进行插值,得到一系列插值点 $\boldsymbol{P}_i=(X_i,Y_i,Z_i)$ $i=0,1,2,\cdots,n$,根据相关插值方程把插值点写成:$\boldsymbol{P}(t)=[X(t),Y(t),Z(t)]t\in[0,1]$。三维空间完成插值之后,需要转换为四维空间的单位四元数,要保证旋转轴矢量为单位转轴,即要对旋转轴矢量进行单位化,则改为

$$\boldsymbol{P}(t)=\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}\cdot\left\{\frac{[X(t),Y(t),Z(t)]}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\right\}\quad t\in[0,1] \tag{7}$$

将(7)式中 $\boldsymbol{P}(t)$ 的表达式代入到(6) 式中,然

后等式两边再取指数,得到

$$q(t)=\exp\left(\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}\cdot\left\{\frac{[X(t),Y(t),Z(t)]}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\right\}\right)\ t\in[0,1] \quad (8)$$

将(8)式与(5)式进行类比,得到插值单位四元数的旋转角与旋转轴矢量

$$\begin{cases}\theta(t)=\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}\\ a(t)=\dfrac{X(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\\ b(t)=\dfrac{Y(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\\ c(t)=\dfrac{Z(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\end{cases}\quad t\in[0,1] \quad (9)$$

最后可以推导出插值单位四元数的实部与复数部

$$\begin{cases}w(t)=\cos\left(\dfrac{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}{2}\right)\\ x(t)=\sin\left(\dfrac{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}{2}\right)\cdot\dfrac{X(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\\ y(t)=\sin\left(\dfrac{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}{2}\right)\cdot\dfrac{Y(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\\ z(t)=\sin\left(\dfrac{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}{2}\right)\cdot\dfrac{Z(t)}{\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)}}\end{cases}\quad t\in[0,1] \quad (10)$$

通过上述方法,S^3 空间的四元数可转换为 R^3 笛卡尔空间的三维向量,然后进行相应的三维样条曲线插值,各插值点经过单位化之后又可转化到旋转空间,从而可以映射到四元数空间,完成四元数姿态样条曲线插值。

由(5)至(6)式可得到(11)式

$$\boldsymbol{q}=[\cos(\theta/2),\boldsymbol{n}\sin(\theta/2)]=\mathrm{e}^{\theta\boldsymbol{n}}=\mathrm{e}^{(X,Y,Z)} \quad (11)$$

从(11)式中可以看出,样条曲线经过取指数之后,必然保持其连续性特性,取指数就是样条曲线映射到四元数空间的过程,因而对应的四元数也保持相应的连续性特性,连续性的阶次不变。

2.2 Hermite 样条曲线插值

在曲线变化不是很剧烈的情况下,三次多项式样条函数是一种很好的拟合插值工具,构造的曲线可达到二阶连续[12],能够解决许多生产实际问题,因此在工程中有一定的应用。文献[12]介绍了 Hermite 三次多项式插值二维平面曲线的原理推导及相关方程,没有直接给出插值三维空间曲线的相关方程,经过进一步的细化,可以得到三维空间中样条曲线的 Hermite 插值方程。

实践证明,取累加弦长作为参数变量比较理想,且能很好的拟合弯曲变化比较剧烈的插值曲线。累加弦长表达如(12)式所示

$$s_0=0$$

$$s_k=\sum_{j=1}^{k}|\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_{j-1}|=\sum_{j=1}^{k}\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2+(z_j-z_{j-1})^2}$$

$$k=1,2,\cdots,n \quad (12)$$

式中,$\boldsymbol{P}_j(x_j,y_j,z_j)$ $j=0,1,2,\cdots,n$ 是给定的型值点,按次序排放的型值点之间距离之和也就是样条曲线的累加弦长 s_k。按次序排放的每两个型值点就决定一条空间样条曲线,因此可以得到多段样条曲线。

在二维平面中分段 Hermite 三次样条曲线的基础上,可得到分段的三维空间 Hermite 三次样条曲线方程。需要说明的是,此时样条曲线取值区间发生了变化,由 x 坐标轴上的区间变成了弦长区间。

$$x_i(s)=[1\quad t\quad t^2\quad t^3]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\-3&3&-2&-1\\2&-2&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{i-1}\\x_i\\h_im_{i-1}\\h_im_i\end{bmatrix}\quad t=[0,1],\ i=1,2,\cdots,n \quad (13)$$

式中,$x_i(s)$ 是指第 i 段弦长区间第 i 段样条插值曲线 x 坐标值,x_{i-1},x_i 是第 i 段样条曲线给定型值点的 x 坐标值,h_i 是第 i 段样条曲线弦长区间长度,可由(14)式求得。m_{i-1},m_i 是第 i 段样条曲线在型值点处的一阶导数。通常情况下,对于整个样条曲线,已

知首末两端型值点的一阶导数 m_0, m_n,但中间型值点的一阶导数 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 是未知的,需要通过(15) 式追赶法求解。

$$h_i = s_i - s_{i-1} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{14}$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{15}$$

在(15)式中,通常情况下,对于整个区间,要给出第一个端点和最后一端点的一阶导数,也就是 m_0, m_n 是已知,需要求取 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$,就必须给出(15) 式中其他相关系数的求法,如(16)式所示。

$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{s_{i+1}}{s_i + s_{i+1}} \\ \mu_i = 1 - \lambda_i \\ c_i = 3\left(\lambda_i \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h_i} + \mu_i \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h_{i+1}}\right) \end{cases} \tag{16}$$

需要指出的是(16)式中, s_i 是指第 1 段样条曲线至第 i 段样条曲线的累加弦长,并不是指第 i 段样条曲线的弦长。

将(16) 式中的系数代入(15) 式中,就可以求得中间型值点的一阶导数,再代入(13) 式中,可以求得各段插值样条曲线的 $x_i(s)$ 坐标值。

用同样的方法,只要分别将型值点的 y, z 坐标值、一阶导数以及相关系数代入上述方程,就可以求得各段插值样条曲线的 $y_i(s), z_i(s)$ 坐标值,最后得到完整的多段 Hermite 三维空间样条插值曲线。

2.3　基于对数四元数的 Hermite 样条曲线姿态插值步骤

综上所述,可将工业机器人对数四元数法的 Hermite 样条曲线多姿态插值步骤描述如下:

步骤 1　根据工业机器人作业任务,得到末端执行器有限个关键姿态,将这些有限的关键姿态转换为四元数形式 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。

步骤 2　根据(6) 式,对四元数取对数,即可得到笛卡尔空间相应的型值点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$,四元数四维向量转化为三维向量。

步骤 3　运用 Hermite 三次多项式样条曲线对型值点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 进行插值,得到 $n-1$ 段插值样条曲线。

步骤 4　通过(9) 至(10) 式将 $n-1$ 段插值样条曲线的插值点单位化之后映射到四元数空间,从而得到单位四元数的姿态插值。

该插值步骤的程序流程图如图 4 所示。

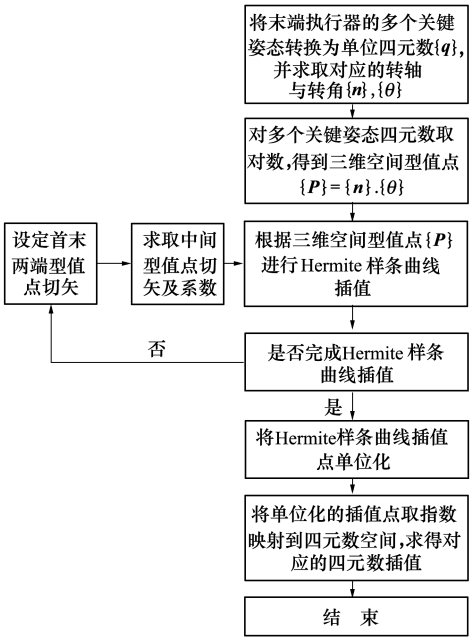

图 4　插值步骤的程序流程图

3　算例验证与分析

3.1　算例验证

为了检验本文提出方法的正确性与合理性,运用相关算例进行验证。

算例　工业机器人为了完成某项工作任务,末端执行器要经历 3 个必要的姿态,第一个姿态为绕参考坐标系 X 转 30°,第二个姿态为绕参考坐标系 Y 转 45°,第三个姿态为绕参考坐标系 Z 转 60°,运用本文介绍的 Hermite 样条曲线进行四元数多姿态插值,均匀插补中间姿态。

该算例的姿态插值过程如下:

1) 末端执行器第一个姿态用四元数表示,$\boldsymbol{q}_1 = [0.965\,9, 0.258\,8, 0, 0]$;第二个姿态用四元数表示为,$\boldsymbol{q}_2 = [0.923\,9, 0, 0.382\,7, 0]$;第三个姿态用四元数表示为,$\boldsymbol{q}_3 = [0.866, 0, 0, 0.5]$。

2) 第一个四元数姿态 $\boldsymbol{q}_1$ 转化为转角 θ_1 与转轴矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 的形式,得到 $\theta_1 = 0.523\,6$,$\boldsymbol{n}_1 = [1, 0, 0]$,按(6) 式得到笛卡尔坐标系中 Hermite 样条曲线的第一个型值点 $\boldsymbol{P}_1 = \theta_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 = [0.523\,6, 0, 0]$。用同样的方法,可以得到第二、三个姿态对应的第二、三个型值点,$\boldsymbol{P}_2 = [0, 0.785\,4, 0]$,$\boldsymbol{P}_3 = [0, 0, 1.047\,2]$

3) 用求得的 3 个型值点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$, 进行 Hermite 三次样条曲线插值。需要给定首、末两端型

值点的一阶导数,在没有指定要求情况下,不防如此设定,单位切矢由 3 个坐标轴方向平均分配,故首个型值点一阶导数 $\dot{x}_1(t)=\dot{y}_1(t)=\dot{z}_1(t)=0.577\,4$,最后一个型值点的一阶导数可设定为 $\dot{x}_3(t)=\dot{y}_3(t)=\dot{z}_3(t)=-0.577\,4$。按前述的方法进行 Hermite 三次样条曲线插值,可得到相应的样条曲线方程。两段样条曲线的参数方程如下:

$$\begin{cases} x_1(t)=1.231\,9t^3-2.332\,9t^2+0.577\,4t+0.523\,6 \\ y_1(t)=-0.993\,4t^3+1.201\,4t^2+0.577\,4t \\ z_1(t)=1.362\,8t^3-1.940\,2t^2+0.577\,4t \end{cases}$$

$$t=[0,1] \tag{17}$$

$$\begin{cases} x_2(t)=-0.970\,1t^3+1.362\,8t^2-0.392\,7t \\ y_2(t)=0.993\,4t^3-1.778\,8t^2+0.785\,4 \\ z_2(t)=-1.886\,4t^3+2.148\,2t^2+0.785\,4t \end{cases}$$

$$t=[0,1] \tag{18}$$

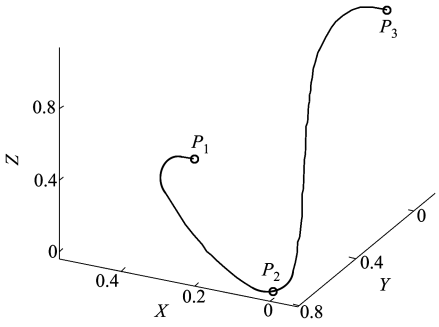

图 5　Hermite 插值样条曲线

如图 5 所示,型值点 P_1,P_2 之间构成第一段 Hermite 样条曲线,型值点 P_2,P_3 之间构成第二段 Hermite 样条曲线,由(17)至(18)式可以验证,这两段样条曲线是三阶连续的,连接这两段样条曲线的公共型值点 P_2 处是二阶连续的,因此整个样条曲线是二阶连续的。

4) 根据选取不同的参数 t,可在两段样条曲线取一定数量的插值点,按(9)至(10)式可将这些三维空间的插值点映射到四元数空间,就可以得到相应的插值四元数。按(8)式将 Hermite 三次样条曲线经过单位化之后,就可转换到旋转空间,从而可以映射到四元数空间。如(11)式所示,最终的四元数插值过程可看成是 Hermite 三次样条曲线取对数,必然保持其二阶连续性,因而对应的四元数也保持二阶连续性。

仅取 $t=0,0.2,0.5,1$ 为例,求得第一段样条曲线相应的插值点坐标,再把三维空间的这些插值点映射到四元数空间得到四元数插值,运算结果列入表 1 中。为了便于区分,笛卡尔空间的坐标值用大写字母表示。

从表 1 中可以看出,当 $t=0$ 时,第一段样条曲线上的第一个点映射到四元数空间,求得的四元数与第一个姿态 $\boldsymbol{q}_1$ 一致;当 $t=1$ 时,第一段样条曲线上的最后一个点映射到四元数空间,求得的四元数与第二个姿态 $\boldsymbol{q}_2$ 一致。

同理,仅取 $t=0,0.2,0.5,1$ 为例,求得 4 组第二段样条曲线映射四元数的数据,如表 2 所示。

表 1　第一段样条曲线部分映射四元数

序号	参数 t_i	样条曲线坐标值			转角 θ/rad	转轴矢量			插值四元数			
									实部	虚部		
		X	Y	Z		a	b	c	w	x	y	z
1	0	0.523 6	0	0	0.523 6	1	0	0	0.965 9	0.258 8	0	0
2	0.2	0.555 6	0.155 6	0.048 8	0.579 1	0.959 5	0.268 7	0.084 2	0.958 4	0.273 9	0.076 7	0.024 1
3	0.5	0.383 1	0.464 9	−0.026 0	0.602 9	0.635 3	0.771 0	−0.043 1	0.954 9	0.188 6	0.228 9	−0.012 8
4	1	0	0.785 4	0	0.785 4	0	1	0	0.923 9	0	0.382 7	0

表 2　第二段样条曲线部分映射四元数

序号	参数 t_i	样条曲线坐标值			转角 θ/rad	转轴矢量			插值四元数			
									实部	虚部		
		X	Y	Z		a	b	c	w	x	y	z
1	0	0	0.785 4	0	0.785 4	0	1	0	0.923 9	0	0.382 7	0
2	0.2	−0.031 8	0.722 2	0.227 9	0.758 0	−0.041 9	0.952 8	0.300 7	0.929 0	−0.015 5	0.352 5	0.111 3
3	0.5	0.023 1	0.464 9	0.694 0	0.835 6	0.027 6	0.556 3	0.830 5	0.913 9	0.011 2	0.225 7	0.336 9
4	1	0	0	1.047 2	1.047 2	0	0	1	0.866 0	0	0	0.5

从表 2 中可以看出,当 $t = 0$ 时,第二段样条曲线上的第一个点映射到四元数空间,求得的四元数与第二个姿态 $\boldsymbol{q}_2$ 一致;当 $t = 1$ 时,第二段样条曲线上的最后一个点映射到四元数空间,求得的四元数与第三个姿态 $\boldsymbol{q}_3$ 一致。

当 t 在取值区间均匀取值时,例如取 $\Delta t = 0.02$ 时,可以分别得到 50 组第一段及第二段样条曲线的插值与映射的数据,完成四元数姿态插值。

图 6 是本算例末端执行器姿态插值时转动角变化曲线,从图中可以看出,初始转角为 0.524,与第一个姿态一致,序列为 50 时,转角为 0.786 与第二个姿态符合。最后的转角为 1.047,与最后姿态一致。并且可以从图中看出转角变化曲线没有出现断点或尖点,转角变化曲线不仅连续而且平滑。

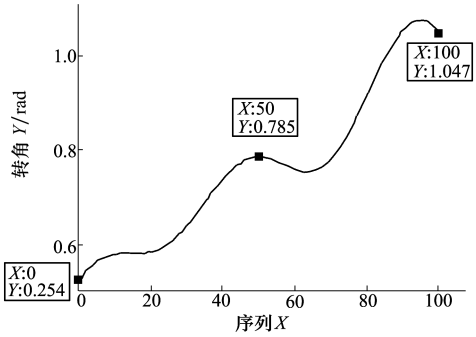

图 6　转角变化曲线

用转动角与转轴矢量来表示的旋转运动可转化为绕 3 个动坐标轴转动的复合欧拉角。如图 7 所示,初始欧拉角为 $(\alpha_x, \beta_y, \gamma_z) = (0.524, 0, 0)$,与第一个姿态一致。序列为 50 时,欧拉角为 $(\alpha_x, \beta_y, \gamma_z) = (0, 0.786, 0)$,与第二个姿态一致。最后的欧拉角为 $(\alpha_x, \beta_y, \gamma_z) = (0, 0, 1.047)$,与最后一个姿态一致。从图 7 中可以看出 3 个欧拉角没有出现间断点或尖点,说明欧拉角变化曲线是连续且平滑的。

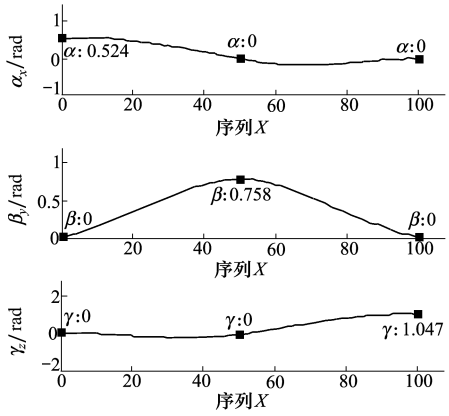

图 7　欧拉角变化曲线

图 8 是转轴矢量变化曲线图,从图中可以看出,初始转轴矢量为 $(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0)$,与第一个姿态转轴矢量一致。中间转轴矢量为 $(a_2, b_2, c_2) = (0, 1, 0)$,与第二个姿态转轴矢量一致。最后转轴矢量为 $(a_3, b_3, c_3) = (0, 0, 1)$,与第三个姿态的转轴矢量一致。并且从图中可以看出转轴矢量变化曲线没有出现尖点或间断点,说明转轴矢量变化也是连续且平滑的。

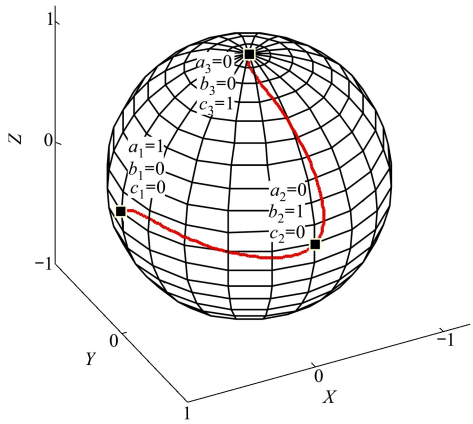

图 8　转轴矢量曲线

3.2　比较分析

如上所述,对多个姿态进行四元数插值时,用本文方法得到的转角及转轴矢量变化都是连续且平滑的。为了进一步比较说明,上面的算例再运用 SLERP 插值方法进行多个姿态的插值,与本文提出的插值方法得到的结果进行对比。

SLERP 插值方法成熟地应用于 2 个四元数姿态之间的插值,但如果对 2 个以上的四元数多姿态插值时,SLERP 插值方法的平滑性就变得很差。

图 9 是用 SLERP 方法进行四元数多姿态插值得到的转角变化曲线图,从图中可以直观看出,虽然转角变化曲线是连续的,但在 K 点处出现明显的尖点,曲线不平滑,在尖点处,会对机械臂产生冲击,对工业机器人的作业质量以及使用寿命均产生不良影响。

图 10 为用 SLERP 插值方法进行四元数多姿态插值得到的转轴矢量变化曲线图,从图中也可以看出变化曲线虽然是连续的,但在 n_2 点处有明显尖

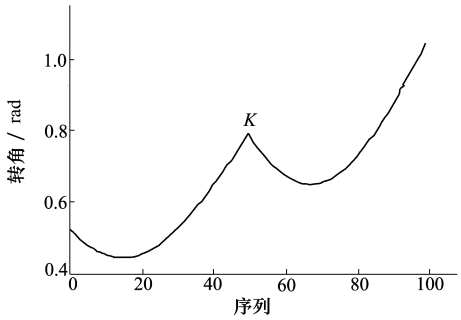

图 9 Slerp 多姿态插值转角曲线

点,转轴矢量曲线不平滑。这种姿态规划必然对机械手末端执行器产生冲击,影响机械手的作业质量和使用寿命。

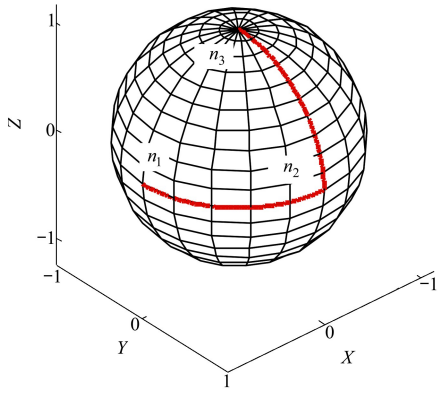

图 10 Slerp 多姿态插值转轴矢量曲线

相对比而言,本文提出的基于对数四元数样条曲线姿态插值能保持插值的平滑性。Hermite 样条曲线的分段样曲线是三阶连续的,并且在分段点处具有二阶连续性,所以整个样条曲线是二阶连续的,能保证曲线的平滑性。Hermite 样条曲线按(11)式取指数之后,就可映射到旋转空间,就可转化为对应的四元数。连续函数取指数之后仍保持其连续性,因而对应的四元数也保持二阶连续性,所以能保证机械手末端执行器姿态插值的平滑性,减少冲击与震动,对工业机器人的工作质量、使用寿命等方面均有益处。

4 结 论

平滑的姿态插值对工业机器人的工作质量、使用寿命等有着明显的影响作用,四元数因为其优点广泛用于姿态插值,但由于四元数属于旋转空间,是四维向量,笛卡尔坐标系下平滑的三维样条曲线插值不能直接用于四元数的插值,因而如何把笛卡尔三维空间的样条曲线插值应用于四元数多姿态插值有着明显的研究意义。

本文提出一种可以把三维样条曲线映射到单位四元数空间的方法。四元数写成转轴矢量与转轴的指数形式,对其取对数之后四元数就可转换到三维空间,此时就可运用三维空间的样条曲线插值方法进行插值,得到相应的插值点之后进行向量单位化,然后可写为转轴矢量与转角的形式,之后再取指数,在三维空间的插值点最后就可映射到四元数空间,实现四元数姿态平滑插值并保持其连续性。

结合文中四元数多姿态插值的算例,详细介绍了 Hermite 样条曲线运用该方法进行多姿态平滑插值的原理与步骤,得到的插值结果和图形验证了该方法进行多姿态插值的合理性与正确性。该方法具有构造方法简单、易于实现、直观易理解的特点。该方法除了适用于 Hermite 样条曲线的四元数多姿态插值,还可延伸到贝赛尔曲线、B 样条曲线等样条曲线上。

参考文献:

[1] SAEED B N. Introduction to Robotics: Analysis, Control, Application[M]. (2nd Edition) Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons Inc, 2010

[2] TAN J, XING Y, FAN W, et al. Smooth Orientation Interpolation Using Parametric Quintic-Polynomial-Based Quaternion Spline Curve[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 329: 256-267

[3] 季晨. 工业机器人姿态规划及轨迹优化研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013
JI Chen. Research on Orientation Interpolation and Optimal Trajectory of Industrial Robot[D]. Harbin, Harbin Institute of Technology, 2013 (in Chinese)

[4] KIM M J, KIM M S, SHIN S Y. A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives

[J]. Computer Graphics, 1995, 29(3): 369-376

[5] 许任政. 刚体朝向轨迹中四元数样条曲线的研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2016
XU Renzheng. Research on the Orientation Spline Curves of the Rigid Body Orientation Trajectory[D]. Hefei, Hefei University of Technology, 2016 (in Chinese)

[6] GE W, HUANG Z, WANG G. Interpolating Solid Orientations with a C^2 Continuous B-Spline Quaternion Curve[C]//International Conference on Technologies for E-Learning and Digital Entertainment, 2007: 606-615

[7] MIURA K. Unit Quaternion Integral Curve: a New Type of Fair Free-Form Curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(1): 39-58

[8] 王效杰. 基于四元数样条曲线的姿态轨迹规划研究[D]. 绵阳: 西南科技大学, 2012
WANG Xiaojie. Research on Orientation Trajectory Planning Based on Quaternion Spline Curve[D]. Mianyang, Southwest University of Science and Technology, 2012 (in Chinese)

[9] 邢燕, 樊文, 檀结庆, 等. 一类 C^2 连续的单位四元数插值样条曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2016, 29(1): 45-50
XING Yan, FAN Wen, TAN Jieqing, et al. A C^2-Continuous Unit Quaternion Interpolatory Spline Curve[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 29(1):45-51 (in Chinese)

[10] KIM M S, NAM K W. Hermite Interpolation of Solid Orientations with Circular Blending Quaternion Curves[J]. Computer Animation & Virtual Worlds, 2015, 7(2): 95-110

[11] 赵晓颖, 温立书, 么彩莲. 欧拉角参数表示下姿态的二阶运动奇异性[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(3):634-637
ZHAO Xiaoying, WEN Lishu, YAO Cailian. The Second-Order Kinematic Singularity of Orientation in Euler Parameters[J]. Science Technology and Engineering, 2012, 12(3): 634-637 (in Chinese)

[12] 常智勇, 万勇. 计算机辅助几何造型技术[M].3 版 北京: 科学出版社, 2013
CHANG Zhiyong, WAN Yong. Computer Aided Geometric Design Technology[M]. (3rd Edition) Beijing, Science Press, 2013

Interpolating Industrial Robot Orientation with Hermite Spline Curve Based on Logarithmic Quaternion

PU Yasong[1,2], SHI Yaoyao[1], LIN Xiaojun[1], GUO Jian[1]

(1.Laboratory of Contemporary Design and Integrated Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2.College of Engineering, Honghe University, Mengzi 661100, China)

Abstract: Smooth orientation planning has an important influence on the working quality and service life as for industrial robot. Based on the logarithmic quaternion, a compact method to map a spline curve from Cartesian space to quaternion space is proposed, and consequently the multi-orientation smooth interpolation of quaternion is realized. Combining with the relevant example case, the detailed method and steps of multi-orientation interpolation are introduced for mapping Hermite spline curve into quaternion space, and the validity of the principle is verified by using the example case. The present multi-orientation smooth interpolation of quaternion has the characteristics of simple construction, easy implementation and intuitive understanding. The method is not only applicable to multi-orientation interpolation of quaternion with Hermite spline curve, but also can extended to the spline curves such as Bezier spline and B-spline.

Keywords: industrial robot; multi-orientation interpolation; logarithmic quaternion; spline cure; smooth interpolation

© 2019 Journal of Northwestern Polytechnical University.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.