

# 利用双参数非线性拟合求解湍流边界层壁面摩擦速度

陆连山, 李栋

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:**热线风速仪是流场测量的基本手段,广泛应用于湍流研究。在低速风洞中用绊线和粗糙带获得充分发展的湍流边界层流动,利用 IFA-300 恒温热线风速仪测量了湍流边界层不同流向站位的时均速度型。以湍流边界层的无量纲速度型模型 White Law 为目标曲线,分析了通过速度型拟合反推壁面摩擦速度方法的应用问题,编制了关于双参数壁面坐标理论零点位置  $y_0$  和壁面摩擦速度  $u_\tau$  的非线性曲线拟合 MATLAB 程序。以实验测量的测点速度为原始拟合数据,讨论了初始搜索区间和搜索步长、拟合数据范围对拟合结果的影响,并最终求解得到  $y_0$  和  $u_\tau$ 。研究结果表明:所提方法编程思路简单,容易实现,合理选取用于曲线拟合的测点速度数据范围,利用该方法可以求得较高精度的壁面摩擦速度值。

**关键词:**湍流边界层; White Law; 无量纲速度型; 壁面摩擦速度; 非线性拟合; 热线风速仪; MATLAB 程序

中图分类号: O357.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2020)02-0253-08

飞行器设计中一个永恒的主题是减阻。已有研究表明,摩擦阻力在典型亚声速民机巡航状态下占总阻力的比例可以高达 50%<sup>[1]</sup>,减小摩擦阻力对改善民机性能、降低民机运营成本有重要意义。飞行条件下,湍流边界层大比例占据飞行器机翼、机身的表面,同时,湍流边界层摩擦阻力大约是层流的 10 倍,所以,湍流边界层减阻对飞行器设计有着十分重要的意义。

在湍流边界层研究中,壁面摩擦应力  $\tau_w$  是非常关键的一个物理量,它可以用来计算摩擦阻力、判断流动转换位置等。一直以来,研究人员致力于更简便、准确地测量得到壁面摩擦应力。常用的壁面摩擦应力测量方法主要包括普雷斯顿管法、油膜干涉法、底层隔板法、表面热膜法等<sup>[2-5]</sup>。随着微机电系统的发展,壁面剪应力微传感器引起了研究人员的重视,也得到了越来越多的应用<sup>[6-8]</sup>。然而这些方法会不同程度破坏固壁表面,影响测量的准确性。

利用热线风速仪测量湍流场也是获得壁面摩擦

应力的有效方法<sup>[9-11]</sup>。热线风速仪是一种能准确测量流体运动的仪器,它可以利用热线探针在单点进行高精度、高响应频率的速度测量。以美国 TSI 公司的 IFA-300 型恒温热线风速仪为例,其采用超低噪声电路,拥有高空间分辨率和几百千赫兹的高频时间响应,单点精确测量速度范围可从每秒 1 厘米至数百米,非常适合于湍流测量。利用热线风速仪,辅以高精度移测架系统,可以实现湍流边界层时均速度型的精确测量,同时,热线探针不需要接触固体壁面,不会对壁面摩擦应力产生影响。

壁面摩擦应力与壁面摩擦速度的关系式为  $\tau_w = \rho u_\tau^2$ ,用热线风速仪测量湍流场以获得壁面摩擦应力,可以归结为求解壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。具体来讲,对于热线风速仪测量得到的湍流边界层空间点时均速度序列  $(y, u)$ ,可以通过壁面摩擦速度  $u_\tau$  无量纲化为  $(y^+, u^+)$ ,其中  $y$  是所测空间点距壁面的物理高度,  $y^+$  是无量纲的壁面单位,  $u^+$  是无量纲时均速度,  $y^+$  和  $u^+$  的具体定义见 2.1 节。然后,根据湍流边界

层的无量纲时均速度分布规律反推壁面摩擦速度  $u_\tau$  的大小。

湍流边界层由里到外通常分为黏性底层、缓冲层、对数区、尾流区。黏性底层、缓冲层和对数区常统称为内区。

黏性底层的范围大约是  $y^+ \leq (5 \sim 10)$ , 无量纲速度分布规律为  $u^+ = y^+$ 。黏性底层里壁面摩擦应力  $\tau_w$  主要为黏性切应力, 即  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{wall}}$ 。

黏性底层向上是缓冲层, 其范围是  $(5 \sim 10) < y^+ < (30 \sim 70)$ , 该层目前没有公认的无量纲速度分布公式。缓冲层里湍流切应力显著增加, 在这一区域内黏性切应力与湍流切应力的作用都不能忽略。

缓冲层之上是对数区, 理论范围是  $(30 \sim 70) \leq y^+, y/\delta \leq 0.2$ , 对数区里无量纲速度分布规律为  $u^+ = 1/\kappa \cdot \ln(y^+) + B$ , 式中  $\kappa$  和  $B$  均为常数, 此区域里湍流切应力占据主导地位。

黏性底层和对数区的无量纲时均速度分布规律非常明确, 研究人员常利用这 2 个区域的空间点时均速度序列  $(y, u)$  来反推摩擦速度  $u_\tau$ , 但是, 也存在各自的问题。对黏性底层而言, 它的厚度非常薄, 加之热线探针太靠近壁面时会产生所谓的“壁面效应”(wall effect<sup>[9]</sup>), 所以在黏性底层里很难测得足够的空间点速度, 因而不容易由速度分布规律确定壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。对对数区而言, 通常认为近壁区域湍流切应力为常数, 且等于壁面摩擦应力, 也即当地摩擦速度与壁面摩擦速度相等, 从而可以根据  $u^+ = 1/\kappa \cdot \ln(y^+) + B$  拟合求解壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。常用的求解壁面摩擦速度  $u_\tau$  的 Clauser 方法<sup>[12]</sup> 是将实验测量的对数区时均速度序列  $(y, u)$  拟合到  $(y^+, u^+)$ , 从而得到  $u_\tau$ 。由于仅仅使用对数区的测点数据进行拟合, 且事实上近壁区湍流切应力不为常数, 它与壁面摩擦应力存在差值, 所以 Clauser 方法求得的  $u_\tau$  往往会比真实值偏大, 文献[13]报道平均误差在 8% ~ 20%。

湍流边界层存在许多无量纲速度型模型, 例如 White Law<sup>[14]</sup>、Spalding<sup>[15]</sup> 速度型、Musker<sup>[16]</sup> 速度型等, 它们给出了从黏性底层、缓冲层直至对数区的速度分布规律。潘光、胡海豹等<sup>[17-18]</sup> 研究了 Spalding 速度型公式用于光滑表面和脊状表面湍流时均速度型的最小二乘拟合, 认为在这种拟合结果中摩擦速度的精度可以得到保证。王康俊等<sup>[19]</sup> 以油膜干涉

法测得的壁面摩擦应力为基准, 对比研究了黏性底层拟合、对数律区拟合以及 Spalding 速度型公式拟合各自求得的壁面摩擦速度的差异, 结果表明 Spalding 速度型公式拟合的准确性和可靠性更优。Kendall 等<sup>[20]</sup> 分别以 Spalding 速度型公式和 Musker 速度型公式为基础, 研究了如何通过拟合方法求解壁面摩擦速度, 平均误差只有大约 0.5%。针对 Clauser 方法仅仅使用对数区的测点数据进行拟合的缺点, 本文以无量纲速度型模型 White Law 为目标曲线, 以实验中利用热线风速仪测得的缓冲层及对数区的测点速度为拟合数据, 通过非线性拟合, 得到壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。这种改进的方法可以很大程度提高  $u_\tau$  的求解精度, 从而也提高了壁面摩擦应力  $\tau_w$  的精度。

## 1 实验设置

### 1.1 风洞

本文的实验是在一座小型下吹式低速风洞里进行的, 风洞的实物图如图 1 所示。



图 1 小型下吹式低速风洞实物图

风洞运行由一部变频电机控制, 电机工作频率 10~50 Hz, 电机带动风机转动, 将空气吸入风洞, 经静流段、阻尼段、收缩段到达实验段。静流段、阻尼段、收缩段平直部分的总长为 1 366 mm, 收缩段收缩部分的长度为 770 mm。从收缩段出口至风洞出口, 该部分总长 4 500 mm, 其横截面为 720 mm(宽) × 200 mm(高)的矩形。核心实验区距收缩段出口 2 000 mm, 左右侧壁以及下壁是有机玻璃板, 上壁为钢板, 安装了一套三维移测架, 钢板上开有矩形测量窗口(675 mm(流向) × 220 mm(展向)), 以供热线探针由上至下伸入风洞并能够随移测架自由移动。风洞稳定风速为 7~20 m/s, 风速控制精度 0.1 m/s, 稳定风速下的风洞背景湍流度不超过 5%。

## 1.2 实验方案

实验来流风速为  $U_\infty = 15.4 \text{ m/s}$ , 为了获得充分发展的湍流边界层, 在收缩段出口下游  $120 \text{ mm}$  的风洞下壁板处布置了一根直径  $4 \text{ mm}$  的绊线, 绊线下游  $25 \text{ mm}$  位置黏贴了一张宽度为  $50 \text{ mm}$  的  $120$  目砂纸。距砂纸尾缘  $1\ 820 \text{ mm}$  处是一个可替换合成射流模块, 模块长宽均为  $100 \text{ mm}$ 。本文主要是介绍一种利用非线性拟合求解湍流边界层壁面摩擦速度的方法, 所以本文的实验是在没有合成射流的情况下进行的, 此时采用一块无开孔的盖板替换有开孔的合成射流盖板, 以避免几何外形的不连续对边界层流动产生影响。

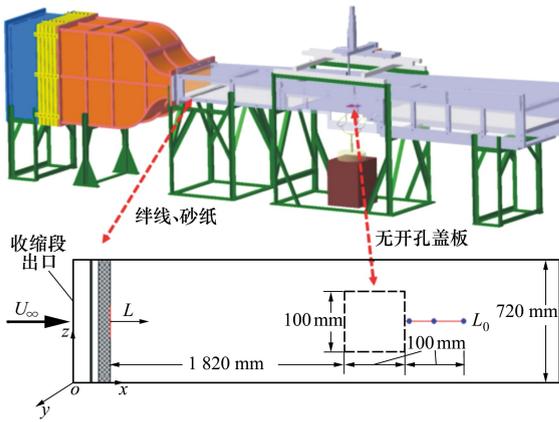


图2 实验模型与测量站位示意图(非等比例)

采用美国 TSI 公司的 IFA-300 型恒温热线风速仪和 TSI-1218-20 型标准边界层探针测量了无开孔盖板下游  $10, 50, 100 \text{ mm}$  流向站位的速度型, 如图 2 中  $L_0$  线上 3 个标记点所示, 3 个站位距砂纸尾缘的距离分别是  $L = 1\ 930 \text{ mm}, 1\ 970 \text{ mm}, 2\ 020 \text{ mm}$ 。在进行速度型测量时, 利用步进精度为  $0.01 \text{ mm}$  的三维测速架沿壁面法向 ( $y$  轴) 由近至远移动热线探针, 共测量了法向高度上  $140$  个空间点的速度分布, 其中第  $1 \sim 17$  点探针移动间隔为  $0.05 \text{ mm}$ , 第  $18 \sim 29$  点探针移动间隔为  $0.1 \text{ mm}$ , 第  $30 \sim 47$  点探针移动间隔为  $0.2 \text{ mm}$ , 第  $48 \sim 125$  点探针移动间隔为  $0.5 \text{ mm}$ , 第  $126 \sim 140$  点探针移动间隔为  $1 \text{ mm}$ 。测量的最低点(第 1 点)距壁面名义高度为  $0.4 \text{ mm}$ , 最高点(第 140 点)距壁面名义高度为  $60 \text{ mm}$ 。边界层内保证不少于  $120$  个测点。热线采样频率  $20 \text{ kHz}$ , 采样时长  $6.553\ 55 \text{ s}$ , 采样点数共  $131\ 072$ 。

## 2 实验数据处理方法

### 2.1 壁面摩擦速度求解原理

实验中利用热线风速仪测量得到的空间点时均速度序列  $(y, u)$  可以通过壁面摩擦速度  $u_\tau$  无量纲化为  $(y^+, u^+)$ , 其中  $y$  是所测空间点距壁面的物理高度,  $y^+$  是无量纲的壁面单位,  $u^+$  是无量纲时均速度。 $y^+$  和  $u^+$  的定义如下

$$y^+ = \frac{(y - y_0) u_\tau}{\nu} \quad (1)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (2)$$

式中:  $\nu$  是流体的运动黏性系数;  $y_0$  表示壁面坐标理论零点位置, 用于修正实验测量时测点的真实高度。

White Law<sup>[14]</sup> 是湍流边界层的壁面积分律, 它以积分的形式给出了无量纲时均速度  $u^+$  与无量纲壁面单位  $y^+$  的关系, 其具体表达式为

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2dy^+}{1 + \{1 + 4\kappa^2 y^{+2} [1 - \exp(-y^+/A)]\}^{1/2}} \quad (3)$$

式中,  $\kappa = 0.41$  是 von Karman 常数,  $A = 25$ 。

将实验测得的无量纲时均速度序列  $(y^+, u^+)$  拟合到 White Law 曲线, 在拟合残差最小时即可以得到壁面坐标理论零点位置  $y_0$  和壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。

### 2.2 残差函数

依据最小二乘原理, 定义残差函数为

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_{i,\text{exp}}^+ - u_{i,\text{white}}^+)^2 \quad (4)$$

式中:  $u_{i,\text{exp}}^+$  是实验测得的无量纲时均速度, 其对应的无量纲壁面单位是  $y_{i,\text{exp}}^+$ ;  $u_{i,\text{white}}^+$  是 White Law 壁面积分律在  $y_{i,\text{exp}}^+$  处的无量纲速度。

Kendall 等人<sup>[20]</sup> 在他们的研究工作中发现, 采用公式(4)作为残差函数, 拟合得到的无量纲时均速度型曲线并非最好, 建议采用“残差绝对值的相对变化量之和”作为残差函数来控制拟合结果, 定义为

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|u_{i,\text{exp}}^+ - u_{i,\text{white}}^+|}{u_{i,\text{white}}^+} \quad (5)$$

一般来讲, 壁面坐标理论零点位置在最低测点之下, 即  $y_0 < y_1$ , 但是如果在实验过程中对  $y_1$  标定

不准确,使得  $y_1$  比真实值偏低,以至出现  $y_0 > y_1$  的情况,根据公式(1)、(3)、(5),此时会导致  $y^+ < 0$ ,  $u^+ < 0$ ,  $\Phi < 0$ ,那么在搜索  $\Phi$  的最小值并提取对应的  $y_0$  和  $u_r$  时将可能获得错误的结果。为了避免这种情况,本文对公式(5)进行了改进,并作为本文采用的残差函数,如公式(6)所示

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{u_{i,\text{exp}}^+ - u_{i,\text{white}}^+}{u_{i,\text{white}}^+} \right| \quad (6)$$

### 2.3 程序求解过程

以 2.1 节中公式(3)给出的 White Law 为目标曲线,以 2.2 节中公式(6)为残差函数,编制了关于双参数  $y_0$  和  $u_r$  的非线性曲线拟合 MATLAB 程序,流程图如图 3 所示,图中  $S_1$  和  $S_2$  分别表示  $y_0$  和  $u_r$  的搜索步长,  $T_1$  和  $T_2$  分别表示  $y_0$  和  $u_r$  的误差限。

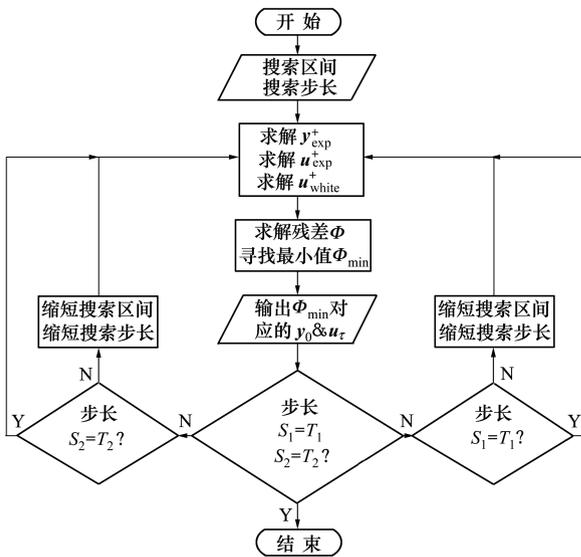


图 3 双参数非线性拟合 MATLAB 程序流程图

程序运行需事先给定初始搜索区间和搜索步长,运行过程中则需要根据每一轮搜索获得的当前最优解来确定新的搜索区间和搜索步长。本文的 MATLAB 程序根据  $y_0$  和  $u_r$  分别落在各自搜索区间中的具体位置,采用类似二分法的思路缩短搜索区间长度:

- 若落在前 1/4 个搜索区间,则:搜索区间下限不变,上限以  $y_0$  (或  $u_r$ ) 的当前最优解为起始外扩 1/4 原搜索区间的长度;
- 若落在后 1/4 个搜索区间,则:搜索区间上限不变,下限以  $y_0$  (或  $u_r$ ) 的当前最优解为起始外扩 1/4 原搜索区间的长度;
- 若落在中间 1/2 个搜索区间,则:以  $y_0$  (或  $u_r$ )

的当前最优解为中心,搜索区间减半。

本文的 MATLAB 程序缩短搜索步长的方法是:新一轮的搜索步长缩短至上一轮的 1/10。

## 3 实验结果和讨论

本文测量了距砂纸尾缘  $L = 1\ 930, 1\ 970, 2\ 020$  mm 流向站位的速度型,在每个站位处沿法向均有 140 个测点,边界层内测点数不少于 120 个。本节将以  $L = 1\ 930$  mm 站位的测量结果为例,讨论初值选取、拟合数据范围对双参数非线性拟合结果的影响,并在最后给出具体的实验结果。

### 3.1 初值选取对拟合结果的影响

在运行程序之前,需要先给定  $y_0$  和  $u_r$  的初始搜索区间和搜索步长。有 2 种给定初始搜索区间的方法。第一种方法,对  $y_0$  而言,可以以最低测点的物理坐标  $y_1$  为搜索区间的上限;对  $u_r$  而言,可以利用光滑平板湍流边界层的理论公式预估  $u_r$  的大小,然后以预估值为中心给定一个合适长度的搜索区间。另一种方法是对  $y_0$  和  $u_r$  都直接给定较大的初始搜索区间。2 种方法的差别主要体现在程序运行时间的不同,一般情况下,初始搜索区间越大,程序运行用时越长。初始搜索步长应根据具体实验具体确定,本文选取  $y_0$  的初始搜索步长为 0.1 mm,误差限为 0.001 mm;  $u_r$  的初始搜索步长为 0.01 m/s,误差限为 0.000 1 m/s。

表 1 给出了  $L = 1\ 930$  mm 站位所测实验数据通过非线性曲线拟合得到的  $y_0$  和  $u_r$  数值。由表 1 可以发现,取不同长度的搜索区间时,程序经过一次搜索,都能够收敛到当前的最优  $y_0$  和  $u_r$  组合,随着搜索区间和搜索步长的缩短,最小拟合残差  $\Phi_{\min}$  减小,拟合结果的精度进一步提高,最终拟合得到 6 组数据,  $y_0$  的标准差为  $\sigma(y_0) = 0.000\ 27$  mm,  $u_r$  的标准差为  $\sigma(u_r) = 0.000\ 091$  m/s,说明程序拟合结果稳定性非常好,受给定的初始搜索区间的影响很小,只要给定的初始搜索区间包含物理解,则程序拟合结果对初始搜索区间并不敏感。

### 3.2 拟合数据范围对拟合结果的影响

在特定流向站位完成速度型测量后,并不是所有的测点数据都可以用来进行无量纲速度型曲线拟合,为了保证拟合精度,需要合理选择拟合数据范围。本小节将采用不同范围的数据进行拟合,通过对比,说明正确地选择拟合数据范围的重要性。

表 1  $L=1\ 930\ \text{mm}$  站位采用不同初始搜索区间的拟合结果

初始搜索区间		第一轮搜索拟合结果				最终拟合结果	
$y_0/(mm \sim mm)$	$u_\tau/(m/s \sim m/s)$	$\Phi_{\min}$	$y_0/mm$	$u_\tau/(m \cdot s^{-1})$	$\Phi_{\min}$	$y_0/mm$	$u_\tau/(m \cdot s^{-1})$
$y_0:0.0 \sim 0.8$	$u_\tau:0.2 \sim 1.0$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 283	$y_0=0.398\ 5$	$u_\tau=0.638\ 40$
$y_0:0.1 \sim 0.7$	$u_\tau:0.3 \sim 0.9$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 287	$y_0=0.398\ 4$	$u_\tau=0.638\ 28$
$y_0:0.2 \sim 0.6$	$u_\tau:0.4 \sim 0.8$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 291	$y_0=0.398\ 3$	$u_\tau=0.638\ 35$
$y_0:0.3 \sim 0.5$	$u_\tau:0.5 \sim 0.7$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 295	$y_0=0.398\ 1$	$u_\tau=0.638\ 32$
$y_0:0.3 \sim 0.4$	$u_\tau:0.6 \sim 0.7$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 281	$y_0=0.398\ 8$	$u_\tau=0.638\ 54$
$y_0:0.3 \sim 0.5$	$u_\tau:0.6 \sim 0.7$	0.003 896	$y_0=0.40$	$u_\tau=0.640$	0.003 296	$y_0=0.398\ 1$	$u_\tau=0.638\ 34$

为了考察不同拟合数据范围对拟合结果的影响,根据表 1 选定  $y_0$  初始搜索区间为  $0.3 \sim 0.5\ \text{mm}$ 、 $u_\tau$  的初始搜索区间为  $0.6 \sim 0.7\ \text{m/s}$  进行拟合作业。表 2 给出了据此得到的  $L=1\ 930\ \text{mm}$  站位最终拟合结果。图 4 展示了利用数据范围  $1 \sim 30$  点、 $6 \sim 30$  点和  $6 \sim 100$  点进行拟合作业得到的  $y_0$  和  $u_\tau$  绘制的无量纲速度型曲线。

由图 4 可见,利用  $1 \sim 30$  点进行拟合作业时,拟合速度型曲线与 White Law 在缓冲层底部未能完整贴合,两者在黏性底层的差异更为明显,尤其是第 1 点发生了明显的转折上扬,这种现象往往都是由“壁面效应”导致的。在剔除存在“壁面效应”的测点( $1 \sim 5$  点)、将拟合数据范围选为  $6 \sim 30$  点后,拟合速度型曲线与 White Law 在缓冲层吻合良好,改用  $6 \sim 100$  点也体现出比  $1 \sim 30$  点更好的拟合效果。

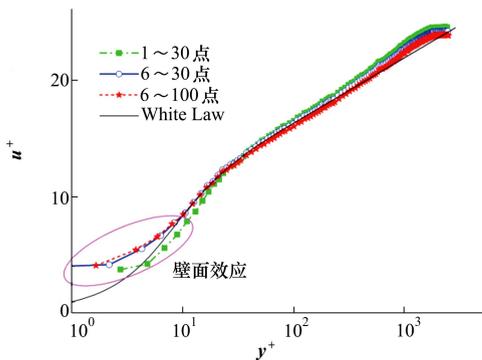


图 4  $L=1\ 930\ \text{mm}$  站位采用不同拟合数据范围进行拟合作业获得的拟合结果

“壁面效应”对拟合结果的影响是巨大的,因其本身即是测量中产生的坏点,如表 2 中数据范围为  $1 \sim 30$  点和  $1 \sim 40$  点所示,拟合得到的  $y_0$  和  $u_\tau$  与其他数据范围的结果相比有明显偏差,最小拟合残差

甚至比其他情形大一个量级。对于这些异常点,在选取拟合数据时应当舍弃。

表 2  $L=1\ 930\ \text{mm}$  站位采用不同拟合数据范围的拟合结果

拟合数据范围	$\Phi_{\min}$	$y_0/mm$	$u_\tau/(m \cdot s^{-1})$
$1 \sim 30$ 点	0.040 616	0.333 5	0.629 55
$1 \sim 40$ 点	0.032 886	0.337 5	0.632 61
$6 \sim 30$ 点	0.003 956	0.399 1	0.638 74
$6 \sim 40$ 点	0.003 296	0.398 1	0.638 34
$6 \sim 50$ 点	0.003 426	0.399 1	0.638 74
$6 \sim 60$ 点	0.005 073	0.402 1	0.640 54
$6 \sim 80$ 点	0.009 531	0.404 1	0.642 54
$6 \sim 100$ 点	0.013 247	0.411 1	0.647 56

从第 50 测点开始进入尾流区,选取的拟合数据中有若干数据点落在尾流区,则会导致  $u_\tau$  的拟合值偏大,如表 2 中  $6 \sim 60$  点、 $6 \sim 80$  点、 $6 \sim 100$  点的拟合结果所示。 $u_\tau$  偏大的原因在于,湍流边界层从对数区过渡到尾流区,速度型曲线向上产生一定程度的偏折,使得尾流区的速度型曲线比对数区偏上,若拟合数据范围包含尾流区,根据最小二乘原理,要保证拟合数据点离目标曲线的“距离”尽量小,最小拟合残差必然是在一种中间状态下获得,即在对数区,拟合速度型曲线(实验)在目标速度型曲线(理论模型)之下;在尾流区拟合速度型曲线在目标速度型曲线之上。

图 5 以拟合数据范围  $6 \sim 100$  点为例,清晰地展示了上述情形,其效果相当于拟合速度型曲线整体向下“平移”,根据公式(2), $u_\tau$  的拟合值将比真实值偏大,并且拟合数据包含的尾流区测点越多, $u_\tau$  的拟合值越偏大。所以,在确定拟合数据范围时应保证最高点没有落在尾流区中,为稳妥计,可以将最高点选取适当下移,而并不一定要将对数区所有测

点都纳入拟合数据中。

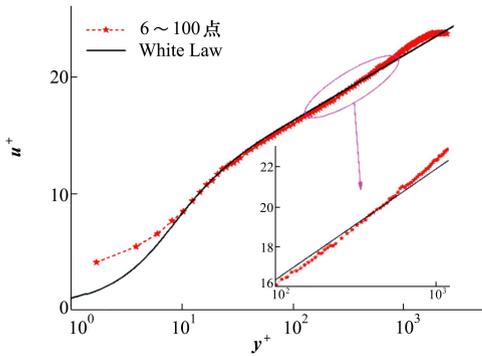


图 5  $L=1\ 930\ \text{mm}$  站位拟合数据包含尾流区测点导致拟合速度型曲线向下“平移”

实际应用中,作者选取拟合数据范围的经验是:第一步,根据理论公式预估的  $u_\tau$  值计算各个测点对应的  $y^+$  (计算时取  $y_0 = 0$ );第二步,根据  $y^+$  的计算结果选取对数区及以下的所有测点作为拟合数据范围进行第一次拟合;第三步,观察拟合结果,调整拟

合数据的最低点和最高点,具体做法是:只要没有“壁面效应”,则测量数据的最低点即可作为拟合数据的最低点,同时,要保证最高点不在尾流区中;第四步,在最高点不在尾流区的前提下,上下调整最高点位置,进行多次拟合,选取  $\Phi_{\min}$  最小的一次拟合作为最终拟合结果。

### 3.3 实验结果

根据 3.1 与 3.2 节的讨论,通过合理选取拟合数据范围,分别对  $L=1\ 930, 1\ 970, 2\ 020\ \text{mm}$  流向站位的实验数据进行双参数非线性拟合处理,结果如表 3 所示,并利用拟合所得  $y_0$  和  $u_\tau$  绘制了 3 个站位的无量纲速度型曲线,如图 6 所示。光滑平板湍流边界层的形状因子  $H$  定义为边界层位移厚度与动量厚度之比,其理论值为  $H \approx 1.3^{[21]}$ ,由表 3 可见,3 个站位的边界层形状因子均与理论数值接近,说明所测站位处湍流边界层已经充分发展,反映在图 6 中,实验测得的速度型在缓冲层和对数区均与 White Law 吻合得非常好。这也说明了本文求得的壁面摩擦速度  $u_\tau$  数值准确,求解方法可靠。

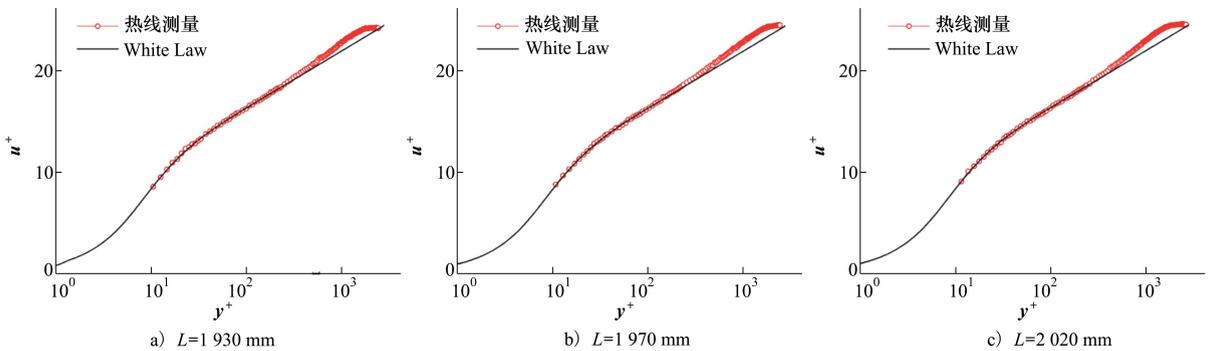


图 6  $L=1\ 930, 1\ 970, 2\ 020\ \text{mm}$  站位的无量纲速度型(未显示有“壁面效应”的测点)

表 3 3 个站位的边界层信息

站位	拟合数据范围	$y_0/\text{mm}$	$u_\tau/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$\tau_w/(\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$	$\delta_0/\text{mm}$	$Re_\theta$	$H$
$L=1\ 930\ \text{mm}$	6~40 点	0.398 1	0.638 34	0.475 6	3.69	3 759	1.291
$L=1\ 970\ \text{mm}$	7~36 点	0.291 0	0.631 71	0.465 8	3.92	3 995	1.280
$L=2\ 020\ \text{mm}$	3~41 点	0.223 3	0.630 31	0.463 7	3.96	4 033	1.294

## 4 结 论

作为湍流测量的基本手段,热线风速仪现今依然广泛应用于湍流研究。本文用恒温热线风速仪测

量了湍流边界层 3 个流向站位的时均速度型,编制了关于壁面坐标理论零点位置  $y_0$  和壁面摩擦速度  $u_\tau$  的双参数非线性曲线拟合 MATLAB 程序,并以所测实验数据为基础讨论了初始搜索区间和搜索步长以及拟合数据范围对拟合结果的影响。本文得到的

主要结论有:

1) 本文的 MATLAB 程序拟合结果稳定性非常好,只要给定的初始搜索区间包含物理解,则程序拟合结果对初始搜索区间并不敏感;

2) 初始搜索步长应根据具体实验具体确定;

3) 在选取拟合数据范围时,应保证最高点不在尾流区中,只要没有发生“壁面效应”,最低点可以一直下探到缓冲层甚至更低,而不用局限在对数区,这扩大了可用拟合数据的范围,提高了  $u_\tau$  的求解

精度。

本文采用了湍流边界层壁面积分律 White Law 作为无量纲速度型模型,事实上,将 White Law 替换成 Spalding 速度型、Musker 速度型等,同样可以求解壁面摩擦速度  $u_\tau$ 。以不同的无量纲速度型模型为目标曲线,对同一站位的实验数据分别进行双参数非线性拟合,这样将会得到一组  $u_\tau$ ,从而可以给出  $u_\tau$  的置信区间。

## 参考文献:

- [1] THIBERT J J, RENEUX J, SCHMITT V. ONERA Activities on Drag Reduction [C] // Proceedings of the Seventeenth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, 1990: 1053-1064
- [2] WINTER K G. An Outline of the Techniques Available for the Measurement of Skin Friction in Turbulent Boundary Layers [J]. Progress in Aerospace Sciences, 1979, 18(77): 1-57
- [3] NITSCHKE W, HABERLAND C, THUENKER R. Comparative Investigations on Friction Drag Measuring Techniques in Experimental Aerodynamics [C] // Proceedings of the Fourteenth Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, 1984: 391-403
- [4] FERNHOLZ H H, JANKE G, SCHOBER M, et al. New Developments and Applications of Skin-Friction Measuring Techniques [J]. Measurement Science & Technology, 1996, 7(10): 1396
- [5] ZANOUN E S, JEHRING L, EGBERS C. Three Measuring Techniques for Assessing the Mean Wall Skin Friction in Wall-Bounded Flows [J]. Thermophysics & Aeromechanics, 2014, 21(2): 179-190
- [6] PAPAN T V, STEFFES H, NGO H D, et al. A Micro Surface Fence Probe for the Application in Flow Reversal Areas [J]. Sensors and Actuators A(Physical), 2002, 97/98: 264-270
- [7] SAVELSBERG R, SCHIFFER M, OBERMEIER E, et al. Calibration and Use of a Surface Fence for Wall Shear Stress Measurements in Turbulent Flows [J]. Anaesthesia & Intensive Care Medicine, 2012, 13(3): 77-80
- [8] 严宇超, 姜澄宇, 马炳和, 等. 壁面剪应力标定方法研究综述 [J]. 实验流体力学, 2017, 31(2): 20-25  
YAN Yuchao, JIANG Chengyu, MA Binghe, et al. Review of the Calibration Methods and Devices for Wall Shear Stress [J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2017, 31(2): 20-25 (in Chinese)
- [9] HUTCHINS N, CHOI K S. Accurate Measurements of Local Skin Friction Coefficient Using Hot-Wire Anemometry [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2002, 38(4): 421-446
- [10] ZAFIRYADIS F, MEYER K E, ERGIN F G. Measurement of Turbulent Skin Friction Drag Coefficients Produced by Distributed Surface Roughness of Pristine Marine Coatings [C] // Tenth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, 2017
- [11] BOIKO A V, KORNILOV V I. Hot-Wire Anemometer Measurement of Local Skin Friction Coefficient [J]. Thermophysics and Aeromechanics, 2010, 17(4): 577-586
- [12] CLAUSER F H. The Turbulent Boundary Layer [J]. Advances in Applied Mechanics, 1956, 4(3): 1-51
- [13] BLACKWELDER R F, HARITONIDIS J H. Scaling of the Bursting Frequency in Turbulent Boundary Layers [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1983, 132(132): 87-103
- [14] WHITE F M. Viscous Fluid Flow [M]. Third Edition. New York: McGraw-Hill, 2006
- [15] SPALDING D B. A Single Formula for the “Law of the Wall” [J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28(3): 455
- [16] MUSKER A J. Explicit Expression for the Smooth Wall Velocity Distribution in a Turbulent Boundary Layer [J]. AIAA Journal, 1979, 17(6): 655-657
- [17] 潘光, 黄明明, 胡海豹, 等. Spalding 公式在脊状表面湍壁摩擦应力测量中的应用 [J]. 力学学报, 2009, 41(1): 15-20  
PAN Guang, HUANG Mingming, HU Haibao, et al. Application of Spalding Formula in Wall Friction Stress Measurement on

- Riblet Surface[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2009, 41(1):15-20 (in Chinese)
- [18] 胡海豹, 宋保维, 刘占一, 等. 基于湍流边界层时均速度分布的脊状表面减阻规律研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(5):1040-1047
- HU Haibao, SONG Baowei, LIU Zhanyi, et al. Research about the Characteristic of Drag Reduction Over Riblets Surface Based on Average Velocity Profile in the Turbulent Boundary Layer[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(5): 1040-1047 (in Chinese)
- [19] 王康俊, 白建侠, 唐湛棋, 等. 用平均速度剖面法测量湍流边界层壁面摩擦速度的对比研究[J]. 实验力学, 2019, 34(2): 209-216
- WANG Kangjun, BAI Jianxia, TANG Zhanqi, et al. Comparative Study of Turbulent Boundary Layer Wall Friction Velocity Measured by Average Velocity Profile Method[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2019, 34(2): 209-216 (in Chinese)
- [20] KENDALL A, Koochesfahani M. A Method for Estimating Wall Friction in Turbulent Wall-Bounded Flows[J]. Experiments in Fluids, 2008, 44(5): 773-78
- [21] POPE S B. Turbulent Flows[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

## Determination of Wall Friction Velocity of the Turbulent Boundary Layer by Two-Parameter Nonlinear Curve Fitting

LU Lianshan, LI Dong

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Hot-wire anemometer is a fundamental tool for flow field measurement, and has been widely adopted in research of turbulent flow. A turbulent boundary layer was generated by a trip wire and a piece of sandpaper in the low-speed wind tunnel, and the time-averaged velocity profiles at three different streamwise stations in the boundary layer were measured with IFA-300 constant temperature anemometer. Targeting the dimensionless velocity profile model White Law of the turbulent boundary layer, a nonlinear curve fitting MATLAB program for two parameters, which were theoretical original point of wall coordinate  $y_0$  and wall friction velocity  $u_\tau$ , was developed. Based on the measured time-averaged velocity profiles, the program was adopted to determine  $y_0$  and  $u_\tau$  of the three streamwise stations. It is found that the initial search domain and search step size of  $y_0$  and  $u_\tau$  have no effect on the fitting results if the physical solutions are included in the domain. It is also found that the selected fitting velocities data are closely related to the results. The value of the friction velocity with high precision will be obtained by this nonlinear curve fitting method if the highest fitting velocity data point dose not fall into the wake region. The method given in this paper is simple in programming and reliable in fitting results, and it is of practical to obtain the wall friction velocity of the turbulent boundary layer.

**Keywords:** turbulent boundary layer; White Law; dimensionless velocity profile; wall friction velocity; nonlinear curve fitting; hot-wire anemometer; MATLAB program