

一种新型加权有向网络演化模型

高庆一¹, 李牧²

(1.北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院, 北京 100191; 2.北京航空航天大学 中法工程师学院, 北京 100191)

摘要:针对现有加权有向网络演化模型大多基于常量平均度假设和网络直径缓慢增长假设,无法刻画现实网络的稠密幂律和直径收缩性质的问题,对无向加权网络演化模型 BBV 引入森林火灾模型的思想,提出一种新的加权有向网络演化模型 BBV_d ,刻画了新节点加入引起的基于入节点强度和出节点强度的新的有向边的生成过程,以及网络局部的有向边权重的动态变化。仿真实验结果表明: BBV_d 不仅满足 BBV 模型提出的节点强度分布符合幂律分布的性质,同时还满足稠密幂律和直径收缩的性质。

关键词:有向加权网络;网络演化模型;稠密幂律;直径收缩

中图分类号:TP393

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2020)04-0913-05

复杂网络研究促使了大量复杂网络模型的产生,用于描述抽象的复杂网络^[1-2],如随机网络模型^[3]、ER 模型^[4]、小世界模型^[5]、BA 模型^[6]等。同时,社交网络应用的兴起使得网络动态性与演化机制成为了重要的研究问题。针对有权网络,Barat 等对无向加权网络提出了简单加权网络演化模型,把节点强度引入到演化规则,被称为 BBV 模型^[7]。BBV 模型很好地刻画了无向加权网络中新节点加入引起的基于节点强度的新的边的生成,以及网络局部的边权重的动态变化。通过对 BBV 模型进行扩展,如对演化规则引入网络社区^[8]、节点吸引力^[9]、节点相关性^[10]、加权节点介数^[11]等网络属性,产生了一系列研究结果。针对有向加权网络,入节点强度与出节点强度被引入至演化规则,以刻画新节点的加入引起的新的有向边的生成^[12-13]。

以上网络演化模型大多基于 2 个假设:常量平均度假设和网络直径缓慢增长假设^[6,14]。常量平均度假设指网络的平均节点度随着时间变化仍为一个常数,即网络的边数关于节点数为线性增长关系;网络直径缓慢增长假设是指随着网络的增大,其直径是缓慢增长的。文献[15]通过对美国专利引用网络、论文引用网络、电影和产品推荐网络、邮件网络

等不同类型的现实网络进行分析,指出网络在演化过程中具有稠密幂律(densification power laws)和直径收缩(shrinking diameters)的性质,即随着网络的演化,其平均度增加,且有效直径(effective diameter)变小,并提出了有向无权网络演化的森林火灾模型。然而,该模型仍无法适合于有向加权网络。

本文针对现有有向加权网络演化模型无法支持稠密幂律和直径收缩性质的问题,提出了一种新的演化模型 BBV_d 。该模型扩展了 BBV 模型,支持有向加权网络演化,且使得生成的有向加权网络满足稠密幂律和直径收缩的性质,符合现实网络特征。

1 BBV 网络演化模型

BBV 网络演化模型是针对一类无向加权网络建立的演化模型^[7],其演化的思想为:当网络中有新节点 n 加入时,网络中已有节点的节点强度(即与该节点相连的所有节点的权重的和)越大,则该节点与新节点 n 相连的概率越大。

无向加权网络 G 是一个无向加权图 (V, E, W) ,

收稿日期:2019-09-15

作者简介:高庆一(1979—),北京航空航天大学大学博士后,主要从事复杂网络分析研究。

通信作者:李牧(1979—),北京航空航天大学讲师,主要从事人工智能及大数据研究。E-mail: limu@buaa.edu.cn

其中

$$s_i \rightarrow s_i + w_0 + \delta_i$$

1) $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 为 G 的节点集合;

2) E 为 G 的边集合, 满足节点 i 与 j 有边相连当且仅当 $(i, j) \in E$;

3) $W = (w_{ij})_{N \times N}$ 是 G 的加权矩阵; w_{ij} 表示节点 i 与 j 相连的边 (i, j) 的权重。

假设若网络 G 中存在边 (i, j) , 则边 (i, j) 的权重 w_{ij} 一定大于 0; 反之若 $w_{ij} = 0$, 则认为节点 i 与 j 之间无边相连。

节点强度的概念是对无权网络的节点的度的概念的扩展, 使其既能包含节点的度的信息, 同时也能表示有权网络中边的权重信息。

设 $G = (V, E, W)$ 是一个无向加权网络。对 V 中任意的结点 i , 令 Γ_i 表示 i 的邻居节点集合, 即 $\Gamma_i = \{j \mid (i, j) \in E\}$, 则节点 i 的节点强度 s_i 为

$$s_i = \sum_{j \in \Gamma_i} w_{ij}$$

即, s_i 是以节点 i 为顶点的所有边的权重的和。

BBV 模型的主要步骤是^[7]:

第 1 步 初始设定

在初始时刻 t_0 , 初始网络 $G_0 = (V_0, E_0)$ 是包含 N_0 个节点的全耦合网络, 其中 $V_0 = \{1, 2, \dots, N_0\}$, 且 G_0 中所有边的权重均初始设为 w_0 。

第 2 步 节点与边的加入

每个时间步增添一个新节点, 并增加该节点与已有节点之间的边。具体地, 假设在 t_k 时刻的网络为 $G_k = (V_k, E_k)$ 。在下一时刻 t_{k+1} , 加入一个新节点 n , 且节点 n 与 G_k 中 m 个节点相连, 即每次新加入 m 条边, 节点 $i \in V_k$ 被选择的概率为:

$$\Pi_{n \rightarrow i} = \frac{s_i}{\sum_{j \in V_k} s_j}$$

式中, s_i 为节点 i 的节点强度。因此, 连接节点的选择按节点权重的大小优先进行。

第 3 步 权值的动态演化

每次新加入的边 (n, i) 均被赋予权值 w_0 , 并动态调整节点 i 与其邻居节点 $j \in \Gamma_i$ 的边权值 w_{ij}

$$w_{ij} \rightarrow w_{ij} + \Delta w_{ij}$$

式中, $\Delta w_{ij} = \delta_i \cdot \frac{w_{ij}}{s_i}$ 。

每次新引入的一条边 (n, i) 会给 i 带来新的流量负担 δ_i , 且与节点 i 相连的每条边 (i, j) 按其权重 w_{ij} 的大小承担部分流量。据此, 节点 i 的节点强度 s_i 变为

2 加权有向网络演化模型 BBV_d

BBV 模型很好地刻画了在无向加权网络中, 新节点的加入引起的基于节点强度的新的边的生成, 以及网络局部的边权重的动态变化。然而, 现实网络中有很多是有向加权网络, 以论文引用网络为例, 节点 u 到 v 有一条边, 表示节点 u 代表的论文引用了节点 v 代表的论文。另外, 文献[15]通过对现实网络进行分析, 指出网络在演化过程中具有稠密幂律和直径收缩的性质, 即随着网络的演化, 网络的平均度增加, 且有效直径变小, 其中有效直径 d 是满足网络中 90% 的节点对之间的无向最短路径都不超过 d 的最小值。因此本文基于 BBV 模型提出有向加权网络的演化模型 BBV_d, 且满足稠密幂和直径收缩的性质。

给定一个有向网络 $G = (V, E, W)$, 其中 E 为有向边集合。对于 G 中任意 2 个节点 i 和 j , $e(i, j)$ 是从节点 i 到节点 j 的一条边, $w(i, j)$ 表示 $e(i, j)$ 的权重。显然, 在有向网络中, $w(i, j)$ 与 $w(j, i)$ 不一定相等。

对于节点 i , 定义 Γ_i^{out} 包含 i 的所有出边到达的节点的集合, Γ_i^{in} 包含所有通过 i 的入边到达 i 的节点集合, 即

$$\Gamma_i^{\text{out}} = \{j \mid e(i, j) \in E\}$$

$$\Gamma_i^{\text{in}} = \{j \mid e(j, i) \in E\}$$

如下定义节点 i 的入节点强度 (in-strength) s_i^{in} 与出节点强度 (out-strength) s_i^{out}

$$s_i^{\text{in}} = \sum_{e(j, i) \in E} w(j, i)$$

$$s_i^{\text{out}} = \sum_{e(i, j) \in E} w(i, j)$$

则 i 的节点强度 s_i 定义为 i 的入节点强度与出节点强度的和, 即 $s_i = s_i^{\text{in}} + s_i^{\text{out}}$ 。

以论文引用网络为例, 假设权 $w(i, j)$ 表示节点 j 所代表的论文被引用的次数, 相应地, 节点 i 的出节点强度表示它引用的所有论文的被引用次数的和, 而 j 的入节点强度表示 j 被引用次数的平方。

文献[15]提出了森林火灾模型, 使得演化后的网络满足稠密幂律和直径收缩的性质。直观上理解, 森林火灾模型的思路是: 设在时刻 t 的网络为 G_t , 节点 v 在时刻 t 加入网络; 首先 v 从 G_t 中随机选

择一个节点 w , 增加边 $e(v, w)$; 然后生成 2 个随机变量 x 与 y 分别服从平均值为 $p/(1-p)$ 与 $rp/(1-rp)$ 的几何分布, 其中, p 是火灾向前燃烧概率 (forward burning probability), $r = p/p_b$ 是火灾向后燃烧率 (backward burning ratio), p_b 是火灾向后燃烧概率 (backward burning probability); 节点 v 选择 x 个从 w 有出边连接的点 w_1, \dots, w_x 以及 y 个到达 w 的点 w_{x+1}, \dots, w_{x+y} , 即 G_t 中存在边 $e(w, w_i), i \in [1, x]$ 和边 $e(w_j, w), j \in [x+1, x+y]$; 对于这些点中在 t 时刻前没有被选中过的点, 增加从 w 到这些点的边, 然后对这些点重复以上步骤, 直至 G_t 中所有的点被选中。

基于森林火灾的思想, 本文扩展 BBV 模型, 提出有向加权网络的演化模型 BBV_d :

第 1 步 初始设定

在 t_0 时刻, 初始网络 $G_0 = (V_0, E_0, W_0)$ 是包含单个节点的网络。

第 2 步 节点与边的加入

假设 G_0 中所有边的权重均为 w_0 。在每个时间步增添一个新节点并增加该新节点与已有节点之间的边。分 2 步进行:

1) 假设在 t_k 时刻的网络为 $G_k = (V_k, E_k)$ 。在下一时刻 t_{k+1} , 加入一个新节点 v 和 m 条边, 即节点 v 与 G_k 中 m 个节点相连, 且 m 个节点的选择按节点强度从大到小排列, 即选择节点 $i \in V_k$ 的概率为

$$P_{n \rightarrow i} = \frac{s_i}{\sum_{j \in V_k} s_j}$$

2) 假设新增的 m 条边的端点分别为 $1, 2, \dots, m$ 。针对每个端点 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 生成 2 个随机变量 x_i 与 y_i , 分别服从平均值为 $p/(1-p)$ 与 $rp/(1-rp)$ 的几何分布:

a) 节点 v 选择 x_i 个从 i 有出边连接的点 u_1, \dots, u_{x_i} , 且增加从 v 到每个点 $u_j (j = 1, \dots, x_i)$ 的边, 其中节点 u_j 的选择按入节点强度的大小优先进行, 即节点 u_j 被选择的概率为

$$P_{v \rightarrow u_j} = \frac{s_{u_j}^{in}}{\sum_{e(i, u) \in E} s_u^{in}}$$

b) 节点 v 选择 y_j 个到达 i 的点 $u_{x_i+1}, \dots, u_{x_i+y_i}$, 且增加从 v 到每个点 $u_k (k = x_i + 1, \dots, x_i + y_i)$ 的边, 其中节点 u_k 的选择按出节点强度的大小优先进行, 即节点 u_k 被选择的概率为

$$P_{v \rightarrow u_k} = \frac{s_{u_k}^{out}}{\sum_{e(u, i) \in E} s_u^{out}}$$

对增加的节点 $u_1, \dots, u_{x_i}, u_{x_i+1}, \dots, u_{x_i+y_i}$ 递归重复以上过程, 直到 V_k 中的所有点都被访问到。注意, V_k 中的点只能被访问一次。

第 3 步 权值的动态演化

每个时间步网络中新增加的边被赋予权值 w_0 。注意到, 增加的边均为新增节点 v 的出边, 因此新增出边 $e(v, i)$ 只对 i 的所有入边的权重进行影响: 对 i 的任意邻居 j , 当 E_k 中存在边 $e(j, i)$ 时

$$w_{ji} \rightarrow w_{ji} + \Delta w_{ji}$$

式中, $\Delta w_{ji} = \delta \cdot \frac{w_{ji}}{s_i^{in}}$ 。

区别于文献 [12-13] 中的演化模型, BBV_d 对 BBV 模型引入了森林火灾模型的思想, 在每个时刻 t , 不仅对新加入的点 v 生成 m 条边, 还对这 m 条边的端点 i 的邻居节点 u 根据其入节点强度与出节点强度分别生成 v 到 u 或 u 到 v 的边, 从而使得 BBV_d 生成的网络能够满足稠密幂律和直径收缩性质。

3 实验及分析

实验实现了加权有向网络演化模型 BBV_d , 并验证了入节点强度与出节点强度的密度函数均服从幂律分布, 并满足稠密幂律和直径收缩性质。

实验部署在 1 台 CPU 为 Intel(R) Core TM i7 960 3.20 GHz CPU, 12 GB 内存, 1TB 硬盘的服务器上。操作系统为 Windows Server 2007, 方法实现语言为 C++。

文献 [15] 指出网络在演化过程中在时刻 t 的边数 $e(t)$ 与节点数 $n(t)$ 有以下关系

$$e(t) = n(t)^a$$

式中: $a \in [1, 2]$ 是实数, 且 a 越小表示网络越稀疏, a 越大表示网络越稠密, 且 $a = 2$ 时表示任意 2 个节点之间都有一条有向边, 是一个全耦合图。

下面针对以上演化模型, 通过仿真实验检验模型节点的幂律特性。在仿真实验中, 取 $w_0 = 1.0, \delta = 1.0, m = 3, p = 0.37, p_b = 0.32$ 。同时, 实验检验了生成的网络具有稠密幂律性质和直径收缩性质。

如图 1 至 2 所示, 当节点数为 5 000 时, 入节点强度与出节点强度的密度函数服从幂律指数分别为 1.21 与 1.59 的幂律分布。通过观察, 随着网络规模的

扩大该幂律指数不会发生变化。

如图 3 所示,生成的网络均具有稠密幂律的性质。同时,除了过于稀疏的网络($a = 1.06$)外,生成的网络均具有直径收缩(shrinking diameters)的性质。

质。如图 4 所示,当 $a = 1.06$ 时,网络的直径是缓慢增加的;当 a 分别等于 1.24, 1.34 和 1.60 时,生成的网络的直径均减小,且 a 越大,减小的趋势越大。

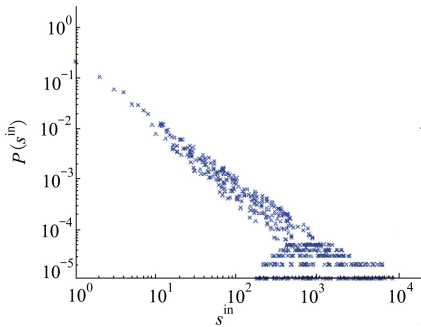


图 1 入节点强度分布

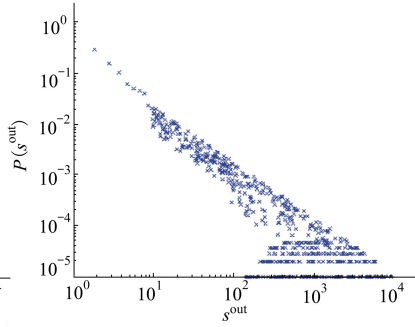


图 2 出节点强度分布

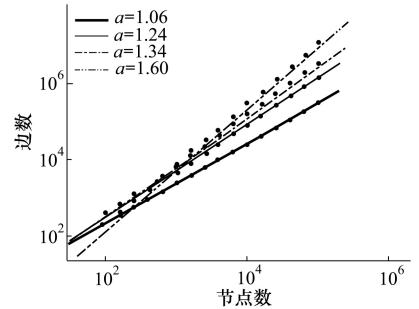


图 3 稠密幂律

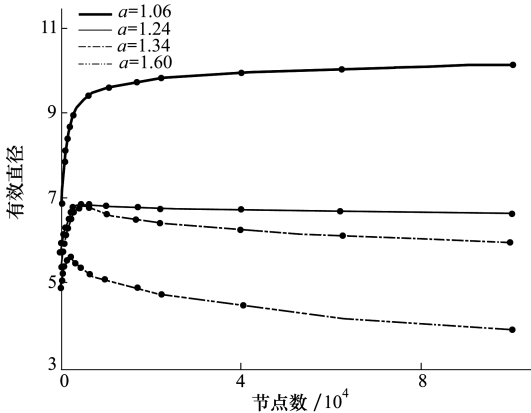


图 4 有效直径

4 结 论

本文针对现有有向加权网络演化模型不满足现实网络演化具有的稠密幂律和直径收缩性质的问题,基于森林火灾算法的思想,对 BBV 模型进行扩展,提出了加权有向网络演化模型 BBV_d 。仿真实验结果表明, BBV_d 不仅满足 BBV 模型提出的节点强度分布符合幂律分布,同时还满足稠密幂律和直径收缩的性质,符合现实网络的特征。

参考文献:

[1] RWAL C, SUBBIAN K. Evolutionary Network Analysis: a Survey[J/OL]. (2014-05-15) [2019-08-30]. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/2601412>

[2] COOLEN T, ANNIBALE A, ROBERTS E. Generating Random Networks and Graphs[M]. Oxford University Press, 2017

[3] SOLOMONOFF R J, RAPOPORT A. Connectivity of Random Nets[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1951, 13(2): 107-117

[4] ERDŐS P, RÉNYI, A. On the Strength of Connectedness of a Random Graph[J]. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1964, 12(1/2): 261-267

[5] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective Dynamics of ‘Small-World’ Networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442

[6] BARABASI A, ALBERT R. Emergence of Scaling in Random Networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512

[7] BARRAT A, BARTHELEMY M, VESPIGNANI A. Weighted Evolving Networks: Coupling Topology and Weight Dynamics[J/OL]. (2004-06-04) [2019-08-30]. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.92.228701>

[8] WANG D, QIAN X, JIN X. Dynamical Evolution of Weighted Scale-Free Network Models [C]//24th Chinese Control and Decision Conference, Taiyuan, 2012

[9] DENG X, WU Y, LI D, et al. A Weighted Network Model Based on Node Fitness Dynamic Evolution[C]//IEEE 22nd Interna-

tional Conference on Parallel and Distributed Systems, 2016

- [10] DENG X, WU Y, DONG M, et al. A Weighted Network Model Based on the Correlation Degree Between Nodes[C]//11th International Conference on Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks, Shenzhen, 2015
- [11] TOPIRCEANU A, UDRESCU M, MARCULESCU R. Weighted Betweenness Preferential Attachment: a New Mechanism Explaining Social Network Formation and Evolution[EB/OL].(2018-07-18)[2019-08-30]. <https://www.nature.com/articles/s41598-018-29224-w>
- [12] WANG G, ZHOU J, XIE Y. Directed Weighted Network Model Based on BBV[J]. Computer Engineering, 2010, 36(12): 142-143
- [13] MASUCCI A P, RODGERS G J. Multi-Directed Eulerian Growing Networks[J]. Physica A 386, 2007; 386(1): 557-563
- [14] BRODER A Z, KUMAR R, MAGHOUL F, et al. Graph Structure in the Web[J]. Computer Networks, 2000, 33(1/2/3/4/5/6): 309-320
- [15] LESKOVEC J, KLEINBERG J, FALOUTSOS J. Graph Evolution: Densification and Shrinking Diameters[J/OL].(2007-03-15)[2019-08-30]. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1217299.1217301>

A New Evolution Model for Weighted Directed Networks

GAO Qingyi¹, LI Mu²

(1.School of Reliability and Systems Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;)
(2.Sino-French Engineer School of Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The most of the recent models of directed weighted network evolution capture the growth process based on two conventional assumptions: constant average degree assumption and slowly growing diameter assumption. Such evolution models cannot fully support and reflect the dense power law and diameter shrinkage in the process of evolution of real networks. In this paper, a new evolution model, called BBV_d , is proposed for directed weighted networks by extending BBV model with the idea of the Forest Fire model. In BBV_d , new directed edges are established with probabilities computed based on in/out-strength of nodes, with dynamical evolution of weights for local directed edges. The experimental result shows that the generated networks using BBV_d display power-law behavior for the node strength distributions, and moreover, it satisfies the densification power laws and has shrinking diameter.

Keywords: directed weighted network; network evolution model; densification power laws; shrinking diameter