

计及误差理论的变双曲圆弧齿线圆柱齿轮几何接触特性及敏感性分析

魏永峭¹, 李泽宇¹, 刘永平¹, 郭瑞¹, 杨栋¹, 罗岚¹, 陈忠敏²

(1.兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050;
2.四川建安工业有限责任公司研发中心, 四川 雅安 625100)

摘 要: 齿轮传动特性是齿轮传动中最为重要的研究内容之一,而接触特性是影响齿轮传动性能的重要因素,齿面接触分析(TCA)模型的建立对分析齿轮副接触特性具有指导作用。通过大刀盘成形原理得到变双曲圆弧齿线圆柱齿轮刀具回转面方程,基于齿轮啮合条件建立了该齿轮的齿面数学模型。考虑安装误差对齿轮接触性能的影响,建立了含有安装误差的 TCA 模型,分析了不同安装误差和设计参数对齿轮副几何接触特性及敏感性的影响。结果表明:中心距误差会对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副重合度产生影响;平行度误差对其传动特性影响很大,极大程度上改变了齿轮副接触区域的大小和位置;设计参数对齿轮接触区域大小及位置也会造成不同程度的影响。

关 键 词: 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮; 齿轮接触分析; 安装误差; 接触迹线
中图分类号: TH132 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-2758(2022)03-0679-11

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮采用旋转刀盘法加工,其沿齿宽方向的齿线为圆弧线,工作齿面为均匀变化的双曲线族包络面,不仅具有传统齿轮传动的特点,而且具有更高的抗弯强度、更好的承载能力以及更低的使用与安装要求,具有广阔的应用前景^[1]。

国内外许多学者已对各种齿轮传动形式的接触特性做了大量研究。蒋进科等^[2]通过对准双曲面齿轮进行 ease-off 修形,得到了该齿轮齿面接触印痕及其传动误差曲线。Litvin 等^[3]在齿轮几何学与应用理论一书中提出了对复杂齿面齿轮接触分析的方法思路。Tseng 等^[4]基于矢量法建立了弧齿圆柱齿轮的数学模型,并分析了其接触特性。李仕轩等^[5]针对渐开线圆柱蜗杆与斜齿轮传动副齿面接触问题,基于空间啮合理论和微分几何,建立了传动副共轭齿面接触轨迹及瞬时接触椭圆的数学模型。Chen 等^[6]分析了变螺旋角纯滚动圆柱斜齿轮以螺旋距圆为中心的瞬时接触椭圆。蒋进科等^[7]通过构造斜齿实际齿面,推导了齿面法矢、齿面接触与边缘接触,对实际齿面进行了齿面接触分析,得到了齿面印迹及传动误差,并验证了其正确性。彭先龙等^[8]得到了面齿轮的拓扑修形齿面,并对其啮合传动进行了研究,得到了其传动误差及接触印痕的变化规律。周如传等^[9]推导了齿廓修形的锥形渐开线齿轮和齿廓修形的面齿轮齿面方程,通过轮齿接触分析(TCA)和应力分析,得到了其接触印迹和传动误差曲线。赵宁等^[10]基于蜗杆砂轮磨削面齿轮原理和空间曲面理论,推导了面齿轮齿面磨削点处主曲率和主方向计算公式,获得了瞬时接触椭圆的变化规律。贺鹏等^[11]对渐开线直齿圆柱齿轮和面齿轮的啮合特性进行了研究,通过分析啮合点处的弹性变形与其曲率的关系,得到了面齿轮上的齿面接触区域,最后分析了安装误差对接触区域的影响。董淑婧^[12]通过 Matlab 编程实现了一对弧齿锥齿轮的齿面接触分析,并分别确定不同位置的接触迹线的形状。苏进展等^[13]通过构建齿轮接触数学模型分

收稿日期: 2021-08-16 **基金项目:** 国家自然科学基金青年基金(52105058)、甘肃省自然科学基金(21JR7RA235)、国家重点研发计划(2019YFB2006402)与兰州理工大学红柳优青项目(07-062005)资助

作者简介: 魏永峭(1988—),兰州理工大学副教授,主要从事新型齿轮传动、传动摩擦学研究。e-mail: scuwyq@163.com

析计算了采用刀倾法加工而成的弧齿线面齿轮的接触特性,分析了加工参数及安装误差对接触特性的影响。Liu 等^[14]对弧齿锥齿轮进行了 TCA,得到了其接触形式与传动误差,对比了采用不同齿面生成方式下的啮合性能,并得出了最优方案。王星等^[15]建立了格里森准双曲面齿轮齿面方程,对齿轮副进行了轮齿接触分析,并验证了分析的正确性。杜进辅等^[16]建立了克林贝格制 Cyclo-paloid 摆线齿准双曲面齿轮的全齿面模型,提出了一种改进的 TCA 模型,通过对比接触印痕、传动误差,验证了此方法的可行性。江平等^[17]通过建立弧齿锥齿轮齿面数学模型,进行了轮齿接触分析,并对其传动误差曲线进行优化,得到了一种控制弧齿锥齿轮接触印痕高度的方法。张瑞亮等^[18]对双圆弧弧齿锥齿轮进行了齿面接触分析,得到了齿轮在无安装误差条件下的齿面接触区域和传动误差曲线。何昕等^[19]对等基圆齿锥齿轮的齿面接触特性进行了分析,讨论了齿线和齿廓修形参数的改变对锥齿轮齿面接触区域变化的影响。朱晟平^[20]对圆弧齿廓弧线齿面齿轮的啮合特性进行了深入分析,得到了三维可视化接触迹线。上述文献主要针对不同类型的齿轮进行了齿面接触分析,而对于变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的齿面接触理论鲜有涉及。

本文通过建立包含安装误差的变双曲圆弧齿线圆柱齿轮接触分析数学模型,分析在不同安装误差下设计参数对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮啮合性能的影响规律,为分析和提高该齿轮的啮合性能提供理论基础。

1 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面数学模型

1.1 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮成形原理

与一般圆柱齿轮不同,变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的加工方法与准双曲锥齿轮的加工方法类似,为同一把刀具加工的双曲线包络而成的凹凸齿面。其加工采用旋转刀盘法,变双曲圆弧齿线圆柱齿轮经大刀盘旋转加工而成,其加工原理如图 1 所示,装有双刃刀具的刀盘安装在机床主轴 ($M-M$) 上并绕自身轴线转动,刀具的内外刃形成半径不等的 2 个圆锥面即为齿轮凹凸齿面的成形面,为确保加工出完整的齿形,齿轮工件即绕着自身轴线 ($A-A$) 转动,同

时沿水平方向作往复移动,一次加工过程中刀具同时切削出变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的凹凸齿面。

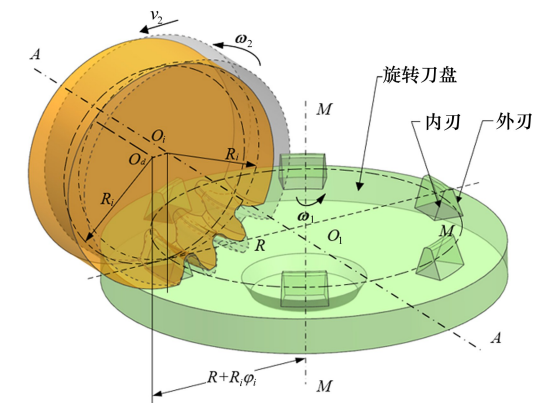


图 1 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮成形原理图

1.2 成形刀具数学模型

采用旋转刀盘加工变双曲圆弧齿线圆柱齿轮时,一对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副可由同一刀具加工而成,为得到其齿面数学模型,通过建立齿轮工件、刀盘和机床的坐标系,利用各坐标系间的变换来描述刀具与工件间的运动,进而通过刀具方程推求得齿面方程。变双曲圆弧齿线圆柱齿轮成形坐标系如图 2 所示。

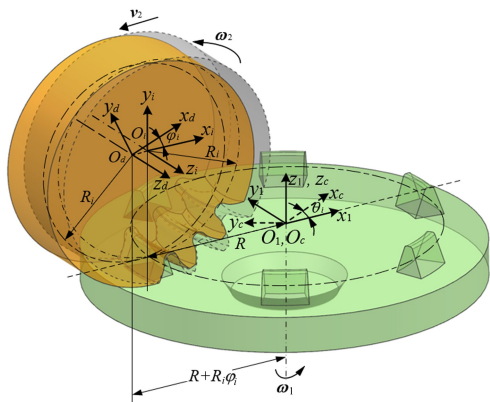


图 2 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮成形坐标系

各坐标系意义如下:机床坐标系(刀具静坐标系) $S_1(x_1, y_1, z_1)$, 齿轮工件静坐标系 $S_i(x_i, y_i, z_i)$ (加工主动轮时 $i = p$, 加工从动轮时 $i = g$), 齿轮工件动坐标系 $S_d(x_d, y_d, z_d)$ 。 R 为齿线半径(刀具回转半径), $R_i (i = p, g)$ 为主、从动轮工件的分度圆半径。由参考文献[21]可知成形刀具在机床坐标系 S_1 下的位置矢量及单位法向量分别为

$$\mathbf{r}_i^1(u_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} -\left(R \mp \frac{\pi}{4}m \pm u_i \sin \alpha\right) \cos \theta_i \\ -\left(R \mp \frac{\pi}{4}m \pm u_i \sin \alpha\right) \sin \theta_i \\ u_i \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$
$$\mathbf{n}_i^1(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \theta_i \\ \cos \alpha \sin \theta_i \\ \pm \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: m 为齿轮的模数; u_i 为刀具沿母线方向到刀具静坐标系 x_1 轴的距离; α 为齿轮压力角; θ_i 表示刀具的位置角; “ $\pm$ ”表示刀具的内外切削刃, 上下部分符号分别表示刀具内刃和外刃。

1.3 啮合线的确定

由齿廓啮合基本定理可知, 齿轮传动过程中, 两瞬心线作纯滚动, 两齿廓则应时刻保持相切接触(但有相对滑动)。所以两齿廓要能连续地相切传动, 既不产生干涉, 又不相互脱开, 则它们在切触点的相对运动速度一定与刀刃回转曲面上切触点的法线矢量垂直, 即^[22]

$$\mathbf{n}_i^1 \cdot \mathbf{v}_{pg} = 0 \quad (3)$$

式中, $\mathbf{v}_{pg}$ 为主从动轮在切触点的相对速度, 可由(1)式求导得到。 $\mathbf{n}_i^1$ 为在刀盘坐标系下切触点的法线向量, 即(2)式。故可求得变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的啮合方程为

$$f_i(u_i, \theta_i, \varphi_i) = u_i \cos \theta_i \pm \sin \alpha \cos \theta_i \cdot \left(R \pm \frac{\pi}{4}m\right) \mp \sin \alpha (R_i \varphi_i + R) = 0 \quad (4)$$

将(4)式化简为关于 u_i 的等式如下所示

$$u_i = \mp \frac{\sin \alpha \left[\cos \theta_i \left(R \pm \frac{\pi}{4}m\right) - (R + R_i \varphi_i) \right]}{\cos \theta_i} \quad (5)$$

(5)式中各符号意义同(1)式。联立方程(1)、(5)可消除参数 u_i , 得到只含参数 θ_i, φ_i 的啮合线的数学表达式, $i = p, g$ 分别表示主、从动轮。

1.4 齿面方程数学模型

根据空间啮合原理和微分几何^[3, 22], 大小齿轮工件与切削刀具内外刃的啮合线在对应齿轮的动坐标系的轨迹即是大小齿轮的工作齿面。加工过程中, 各坐标间的位置关系如图2所示, 通过坐标变换可得到主动轮齿面的位置矢量及其法向矢量

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{di}^d(u_i, \theta_i, \varphi_i) = \mathbf{M}_{di}(\varphi_i) \cdot \mathbf{M}_{il} \cdot \mathbf{r}_i^1(u_i, \theta_i) \\ \mathbf{n}_{di}^d(\theta_i, \varphi_i) = \mathbf{L}_{di}(\varphi_i) \cdot \mathbf{L}_{il} \cdot \mathbf{n}_i^1(\theta_i) \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{M}_{di}, \mathbf{M}_{il}$ 分别为由坐标系 S_i 到 S_d 和坐标系 S_l 到 S_i 的坐标变换矩阵, 其表达式如下所示

$$\mathbf{M}_{di} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & R_i \varphi_i \cos \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & -R_i \varphi_i \sin \varphi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_{il} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_i \\ 0 & 0 & 1 & -R_i \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

而其法矢量坐标变换矩阵 $\mathbf{L}_{di}, \mathbf{L}_{il}$ 为与之对应的 $\mathbf{M}_{di}, \mathbf{M}_{il}$ 位置矢量矩阵消去最后一行与最后一列的三阶矩阵。将(6)式中上、下标 d 替换为 D 即为在坐标系 $S_d(x_d, y_d, z_d)$ 下从动轮齿面的位置矢量及其法向矢量, 即可得到主、从动齿轮的齿面方程数学模型。

2 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面接触分析数学模型

2.1 齿轮副的 TCA 模型

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的啮合齿面为凹凸齿面, 其接触形式较为复杂, 本文将采用 TCA 方法对其齿面接触特性进行分析, 以啮合迹线和接触椭圆为衡量标准来分析安装误差、刀盘半径等参数对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副接触特性的影响。

(6)式已给出了齿轮齿面方程, 在进行齿面接触分析过程中, 需要将所求齿面数学模型经过坐标变换使主从动轮实现正确啮合。变双曲圆弧齿线圆柱齿轮中截面齿廓与渐开线圆柱齿轮相同, 均为渐开线齿廓, 故安装条件类似。图3所示为齿轮副齿面啮合坐标系, $S_m(O_m-x_m, y_m, z_m)$ 为固定坐标系(啮合坐标系), $S_d(O_d-x_d, y_d, z_d)$ 为主动轮动坐标系, $S_a(O_a-x_a, y_a, z_a)$ 为主动轮引入垂直误差 Δv 的坐标系, $S_p(O_p-x_p, y_p, z_p)$ 为在坐标系 S_a 基础上引入水平轴向误差 Δh 的静坐标系。 $S_D(O_D-x_D, y_D, z_D)$ 为从动轮的动坐标系, $S_c(O_c-x_c, y_c, z_c)$ 为从动轮无误差安装时的参考坐标系, $S_g(O_g-x_g, y_g, z_g)$ 为从动轮在坐标系 S_c 基础上引入中心距误差 e_c 的静坐标系。 Δh 为水平轴向误差, Δv 为垂直轴向误差, e_c 为中心距

误差。 ψ_p, ψ_g 分别表示主动轮、从动轮的位置角。 R_p, R_g 分别表示主动轮、从动轮的分度圆半径。

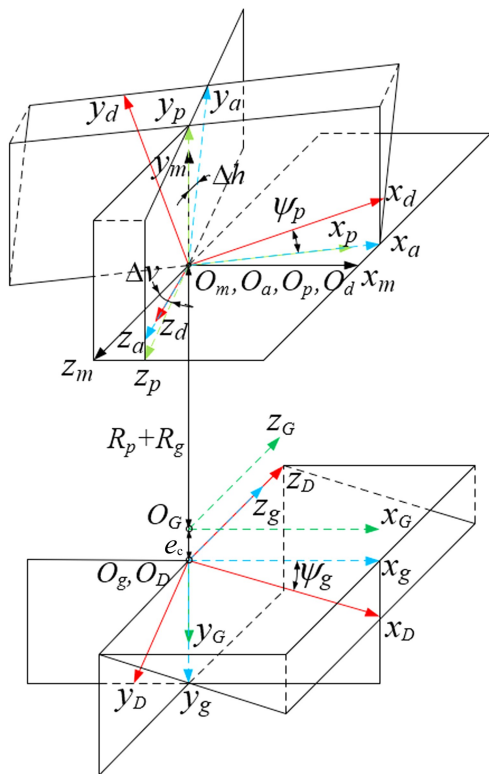


图3 齿轮副接触分析坐标系

在啮合过程中, 2 个共轭曲面连续点接触, 2 个曲面之间存在 1 个切平面和 1 个共享法向量^[23]。根据图 3 所示各坐标系间的相对位置关系引入相应的坐标变换矩阵, 得出实现两齿面连续切触约束式如下所示

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p^m(u_p, \theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{M}_{mp} \mathbf{M}_{pa} \mathbf{M}_{ad}(\psi_p) \mathbf{r}_p^d(u_p, \theta_p, \varphi_p) \\ \mathbf{n}_p^m(\theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{L}_{mp} \mathbf{L}_{pa} \mathbf{L}_{ad}(\psi_p) \mathbf{n}_p^d(\theta_p, \varphi_p) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_g^m(u_g, \theta_g, \varphi_g, \psi_g) = \mathbf{M}_{mG} \mathbf{M}_{Gg} \mathbf{M}_{gD}(\psi_g) \mathbf{r}_g^D(u_g, \theta_g, \varphi_g) \\ \mathbf{n}_g^m(\theta_g, \varphi_g, \psi_g) = \mathbf{L}_{mG} \mathbf{L}_{Gg} \mathbf{L}_{gD}(\psi_g) \mathbf{n}_g^D(\theta_g, \varphi_g) \end{cases} \quad (10)$$

(9) 式、(10) 式中各等式形式同 (6) 式。式中 $\mathbf{M}, \mathbf{L}$ 矩阵形式则同 (7) 式、(8) 式, $\mathbf{M}$ 矩阵分别代表中心距距离 ($\mathbf{M}_{mG}$)、主动轮转角 ($\mathbf{M}_{ad}$)、从动轮转角 ($\mathbf{M}_{gD}$)、中心距误差 ($\mathbf{M}_{Gg}$)、水平轴向误差 ($\mathbf{M}_{pa}$) 与垂直轴向误差 ($\mathbf{M}_{mp}$) 相对应的坐标变换矩阵 (平移、旋转), $\mathbf{L}$ 为与之对应的 $\mathbf{M}$ 位置矢量矩阵消去最后一行与最后一列的三阶矩阵。这里不再赘述。故

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副接触分析的数学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p^m(u_p, \theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{r}_g^m(u_g, \theta_g, \varphi_g, \psi_g) \\ \mathbf{n}_p^m(\theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{n}_g^m(\theta_g, \varphi_g, \psi_g) \end{cases} \quad (11)$$

(11) 式为含有 6 个方程的方程组, 其中未知数为 $u_p, \theta_p, \varphi_p, \psi_p, u_g, \theta_g, \varphi_g, \psi_g$ 。由 (5) 所示的啮合条件可以看出未知量 u_i 可以由含 θ_i, φ_i 两未知量的公式表示, 且 $\mathbf{n}_p^m(\theta_p, \varphi_p, \psi_p), \mathbf{n}_g^m(\theta_g, \varphi_g, \psi_g)$ 都为单位向量, 故 (11) 式为含 6 个变量, 5 个独立方程的方程组。在进行接触计算时可将主动轮的位置角 ψ_p 作为已知量, 使方程变为 5 个未知量, 5 个方程, 进而实现对方程 (11) 的求解。

通过两齿轮啮合过程的关系, 即主动轮齿根与从动轮齿顶接触进入啮合, 主动轮齿顶与从动轮齿根接触退出啮合。将两齿顶圆半径分别作为新的约束条件引入方程 (11) 即可得到 6 个未知量, 6 个独立方程, 便可求解出主动轮啮入位置角、啮出位置角。啮合求解过程中主动轮的位置角 ψ_p 取值范围可由以下 (12) ~ (13) 式求解:

啮入位置角

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p^m(u_p, \theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{r}_g^m(u_g, \theta_g, \varphi_g, \psi_g) \\ \mathbf{n}_p^m(\theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{n}_g^m(\theta_g, \varphi_g, \psi_g) \\ [\mathbf{r}_g^D(x)]^2 + [\mathbf{r}_g^D(y)]^2 = r_{ga}^2 \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{r}_g^D(x), \mathbf{r}_g^D(y)$ 分别代表从动轮齿面方程 $\mathbf{r}_g^D(u_g, \theta_g, \varphi_g)$ 在坐标系 $S_d(x_d, y_d, z_d)$ 下的 x, y 方向的分量, r_{ga} 表示从动轮齿顶圆半径。

啮出位置角

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p^m(u_p, \theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{r}_g^m(u_g, \theta_g, \varphi_g, \psi_g) \\ \mathbf{n}_p^m(\theta_p, \varphi_p, \psi_p) = \mathbf{n}_g^m(\theta_g, \varphi_g, \psi_g) \\ [\mathbf{r}_p^D(x)]^2 + [\mathbf{r}_p^D(y)]^2 = r_{pa}^2 \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{r}_p^D(x), \mathbf{r}_p^D(y)$ 分别代表主动轮齿面方程 $\mathbf{r}_p^D(u_p, \theta_p, \varphi_p)$ 在坐标系 $S_d(x_d, y_d, z_d)$ 下的 x, y 方向的分量; r_{pa} 表示主动轮齿顶圆半径。

齿轮副由于引入了安装误差, 在其传动过程中传动误差也随即产生, 经由方程 (12)、(13) 可以求得从动轮啮入及啮出的实际角度。用从动轮实际转角与由主动轮转角及传动比所求得理论转角做差可求得齿轮副的传动误差如下^[24]

$$\Delta e = \psi_{g2} - \psi_{g1} - \frac{z_1}{z_2}(\psi_{p2} - \psi_{p1}) \quad (14)$$

式中: ψ_{p1}, ψ_{p2} 分别表示主动轮啮入到啮出角度; ψ_{g1}, ψ_{g2} 分别表示从动轮啮入到啮出角度; z_1, z_2 分别表示

主从动轮齿数。

表 1 齿轮副参数表	
参数类别	参数取值
主从动齿轮模数 m	2
主从动齿轮齿宽 B/mm	60
主动轮齿数 Z_p	31
从动轮齿数 Z_g	49
主从动齿轮压力角 $\alpha/(\text{°})$	20
主从动齿轮刀盘半径 R/mm	100

图 4~6 分别为引入中心距误差、水平轴向误

差、垂直轴向误差的接触迹线上的接触点与其所带来的传动误差曲线。

从图 4 可以看出中心距误差只改变接触点径向位置,且不会产生传动误差;从图 5 可以看出接触点位置偏移程度随水平轴向误差的增大而增大,其传动误差也呈逐渐增大趋势;从图 6 可以看出接触点位置偏移程度随垂直轴向误差的增大而增大,但偏移趋势与水平轴向误差相反,同时其传动误差也逐渐朝坐标轴负方向增大。总体来说,变双曲圆弧齿线圆柱齿轮对由垂直轴向误差及水平轴向误差所引起的接触点位置的变化及其传动误差的改变较为敏感。

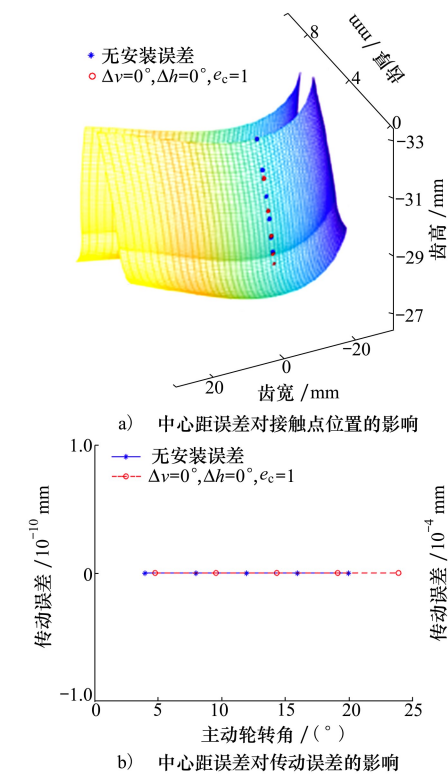


图 4 中心距误差的影响

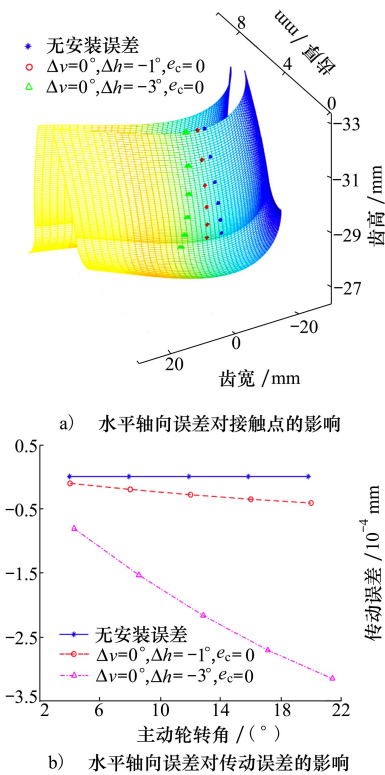


图 5 水平轴向误差的影响

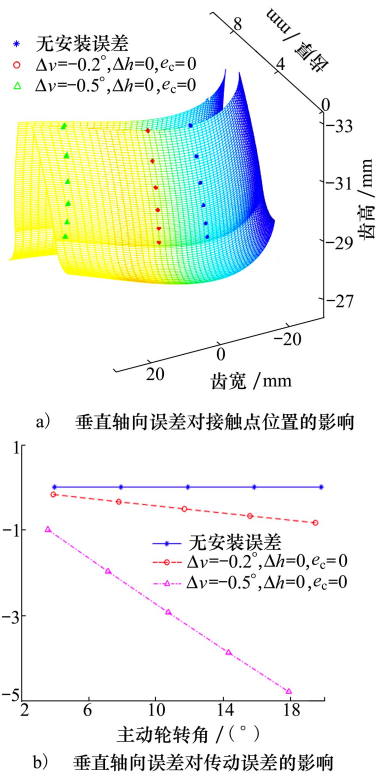


图 6 垂直轴向误差的影响

2.2 接触椭圆

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副其理论啮合过程为点接触,由于材料的弹性变形,点接触齿轮在接触瞬时接触点将扩展为一个椭圆区域,瞬时接触椭圆的对称中心与理论切触点相重合,所形成的接触痕迹为一组接触椭圆,接触椭圆大小可由两啮合齿面在接触点主曲率确定。通常考察接触椭圆在轻载情况下进行,在轻载条件下,通常弹性变形量 δ 可取为

$0.006\ 32\ \text{mm}^{[25]}$ 。通过上文变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副的 TCA 模型可求出啮合迹线上各点位置参数,通过齿面方程可求出接触点处齿面曲率方程,代入位置参数即可求得齿面曲率,进而求得接触椭圆的长轴及短轴大小。

接触点在齿面上的运动轨迹即为接触迹线,图 4~6 相同颜色点所连成的曲线即为变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的接触迹线。变双曲圆弧齿线圆柱齿轮

齿面接触椭圆的长轴在齿面诱导法曲率最小极值的方向,短轴则在齿面诱导法曲率最大极值的方向。接触椭圆大小及位置可由两齿面啮合处的接触点位置、法线位置及椭圆的长短半轴长度确定,最后将所求接触点投影向同一平面,以接触点为圆心做接触椭圆以得到齿面瞬时接触椭圆分布。图7为主从动轮的接触几何关系示意图,其中红色虚线为齿轮副的接触迹线,红色椭圆即为齿轮副接触椭圆(接触迹), x, y 轴分别为其切平面两相互垂直轴,分别表示接触椭圆长轴方向和短轴方向。

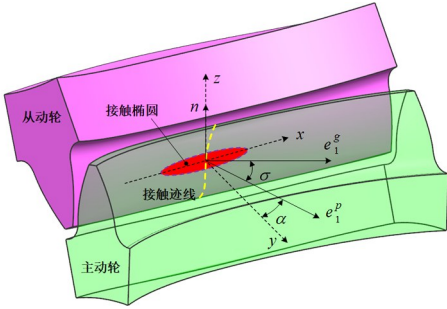


图7 主动轮与从动轮的接触几何关系

2.3 主曲率计算

根据(6)式所得的齿面方程数学模型引入啮合条件(5)式得到齿面矢量及单位法矢表达式

$$\mathbf{r}_{\Sigma i}(\theta_i, \varphi_i) = xi + yi + zi \quad (15)$$

$$\mathbf{n}_i(\theta_i, \varphi_i) = xi + yi + zi \quad (16)$$

式中, θ_i, φ_i 均为齿面参数,对 $\mathbf{r}_{\Sigma}(\theta_i, \varphi_i)$ 分别求一阶偏导及二阶偏导并做如下定义

$$E_i = \mathbf{r}_{\theta}^2, F_i = \mathbf{r}_{\theta} \cdot \mathbf{r}_{\varphi}, G_i = \mathbf{r}_{\varphi}^2$$

$$L_i = \mathbf{r}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n}_i, M_i = \mathbf{r}_{\theta\varphi} \cdot \mathbf{n}_i, N_i = \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \cdot \mathbf{n}_i \quad (17)$$

式中: E_i, F_i, G_i 为曲面的第一类基本量; L_i, M_i, N_i 为曲面的第二类基本量^[26]。

主曲率可以反映齿面几何特性,齿轮在啮合过程中任意啮合点存在的2个正交的主方向都具有不同的主曲率值。而主曲率则为面高斯曲率 K 和平均曲率 H 所构成的一元二次方程的根。变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面高斯曲率 K 和平均曲率 H 及主曲率 K_1, K_2 表达式如(18)~(21)式所示^[27]

$$K_i = \frac{L_i N_i - M_i^2}{E_i G_i - F_i^2} \quad (18)$$

$$H_i = \frac{L_i G_i - 2M_i F_i + N_i E_i}{2(E_i G_i - F_i^2)} \quad (19)$$

$$K_1^i = H_i + \sqrt{H_i^2 - K_i} \quad (20)$$

$$K_2^i = H_i - \sqrt{H_i^2 - K_i} \quad (21)$$

2.4 接触椭圆计算

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮接触椭圆长短半轴长度可由(22)~(23)式确定^[28]

$$a = 2 \left(\frac{\delta}{|K_{\Sigma}^p - K_{\Sigma}^g - (g_p^2 - 2g_p g_g \cos 2\sigma + g_g^2)|} \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$b = 2 \left(\frac{\delta}{|K_{\Sigma}^p - K_{\Sigma}^g + (g_p^2 - 2g_p g_g \cos 2\sigma + g_g^2)|} \right)^{1/2} \quad (23)$$

式中: K_{Σ}^i, g_i 分别为齿面两主曲率之和及之差; $K_{\Sigma}^i = K_1^i + K_2^i, g_i = K_1^i - K_2^i$ 。

δ 为载荷作用下弹性变形量,取0.006 32 mm。 σ 为两啮合齿面主曲率方向间的方向角,可以利用(16)式中各齿面矢量的偏导再通过空间向量夹角公式求得。接触椭圆短轴与主曲率 K_1 方向夹角 α (接触椭圆短轴偏转角度)可由(24)式求得

$$\cos 2\alpha = \frac{g_p - g_g \cos 2\sigma}{(g_p^2 - 2g_p g_g \cos 2\sigma + g_g^2)^{1/2}} \quad (24)$$

3 算例

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的几何特性主要由刀盘半径 R 及齿轮分度圆半径 R_i 决定,故在用上述接触分析模型进行仿真分析时,在考虑安装误差对接触特性影响的基础上同时分析了刀盘半径 R 、齿轮齿数 $Z_p(Z_g)$ 、齿轮模数 m 对接触特性的影响。

3.1 安装误差对接触特性的影响分析

参照表1所示设计参数,图8~11为安装误差对齿轮几何接触特性的影响,且位于主动轮齿面,故啮出位置接触点始终在齿顶圆上。接触点位置已经旋转投影在同一平面内,齿面接触点组成的连线即为齿轮接触迹线。从图8可以看出在没有安装误差与只改变中心距误差的情况下变双曲圆弧齿线圆柱齿轮的接触迹线均出现在齿轮的中截面上,中心距误差的增大会导致接触区域更靠近主动轮齿根。从图9可知随着水平轴向误差的加大,齿轮副的接触迹线向齿侧方向偏移,接触迹线倾斜与弯曲程度也越来越大,其接触椭圆长短轴大小和方向均发生了改变,同时不同的误差方向会使其接触区域向不同侧偏移。

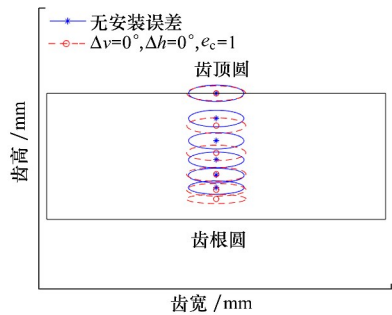


图 8 中心距误差对接触区域的影响

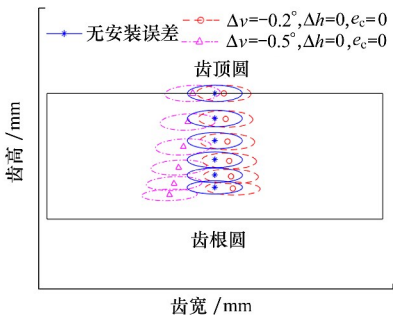
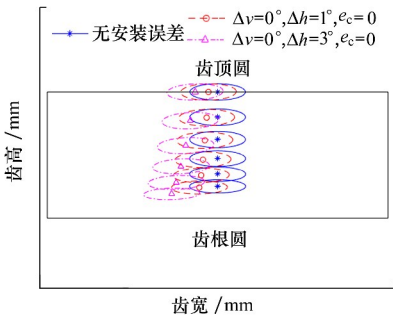


图 9 水平轴向误差对接触区域的影响

图 10 为垂直轴向误差对接触区域的影响,随着垂直轴向误差的加大,齿轮副的接触迹线的变化趋势同上,但是其啮合迹线倾斜与弯曲方向与水平轴向误差所带来的影响略有差异,其接触椭圆长短轴

大小和方向也会发生改变。图 11 所示为同时引入 3 种误差接触区域的变化情况,可以看出由于水平轴向误差与垂直轴向误差对接触迹线造成的影响不同,接触迹线在某些位置近乎一条直线。

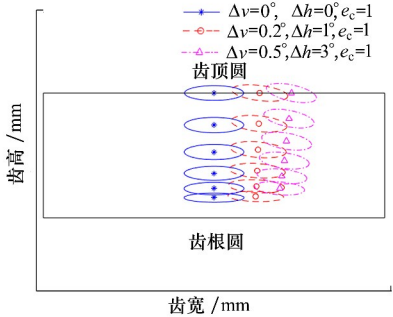
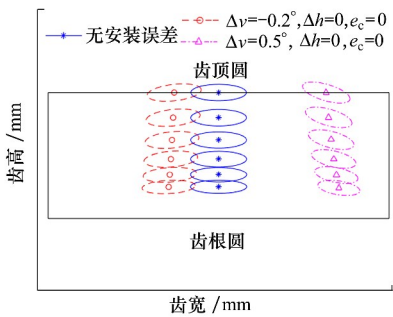
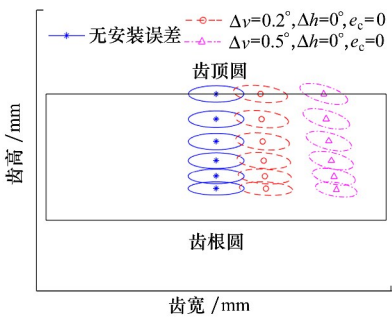


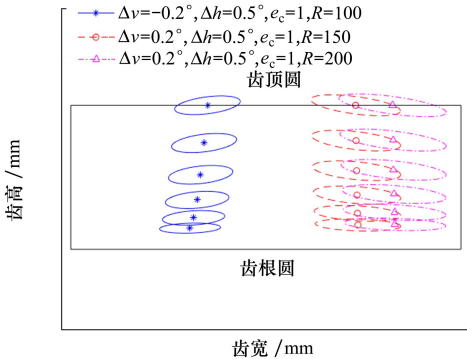
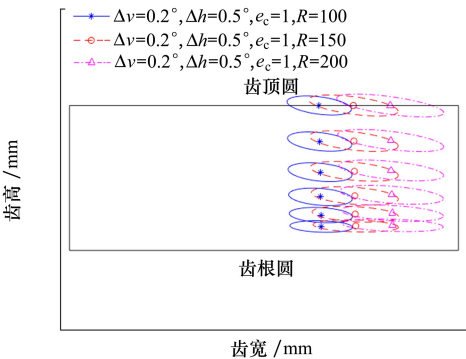
图 10 垂直轴向误差对接触区域的影响

图 11 综合误差对接触区域的影响

3.2 设计参数对接触特性的影响分析

假定该齿轮副在无中心距误差,引入垂直轴向误差为 Δv 和水平轴向误差为 Δh 。分别考虑刀盘半

径 R 、主动轮齿数 Z_p 、齿轮模数 m 对接触特性的影响,其仿真结果如图 12~14 所示。



a) R 取 100, 150, 200 mm 时接触区域变化规律

b) R 取 100 mm ($\Delta v=-0.2^\circ$), 150 mm ($\Delta v=0.2^\circ$), 200 mm ($\Delta v=0.2^\circ$) 时接触区域变化规律

图 12 齿线半径对接触区域的影响

从图12可以看出随着齿线半径的增大,齿轮副接触区域向尺侧偏移,齿轮接触区域逐渐增大,接触椭圆长轴变长,短轴变化不大,不同误差方向的几何接触特性关于中截面对称。造成接触椭圆长轴变长的主要原因是齿线半径的增大齿面沿齿宽方向的主曲率之差减小,在其接触并发生弹性变形情况下接触椭圆长轴变长。

图13为模数对接触区域的影响,安装误差不变的情况下,模数的增大会使齿轮接触迹线发生偏移,同时会导致接触椭圆面积减小。这是因为模数的变化会导致两啮合齿面主曲率之差发生变化,进而造

成接触椭圆长轴变化,而模数的改变同时会造成齿轮接触面积的变化,进而导致接触点位置的变化。

根据图13可以看出随着安装误差 Δh 的增大,模数对接触区域的分布规律的影响更敏感。随着模数的增大,其齿全高随之增大,接触迹线增长。图14为在同一安装条件下齿数对接触区域的影响,齿数的增大会导致齿轮副接触区域向尺侧发生偏移,接触椭圆大小变化不显著。这是因为随着齿数的增大,齿轮尺寸增大,相同的安装误差会使接触点位置变化更大,水平轴向误差及垂直轴向误差对齿数的改变更加敏感。

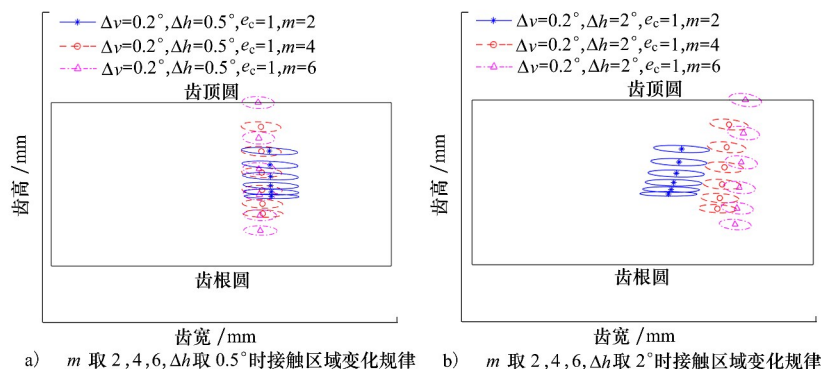


图13 模数对接触区域的影响

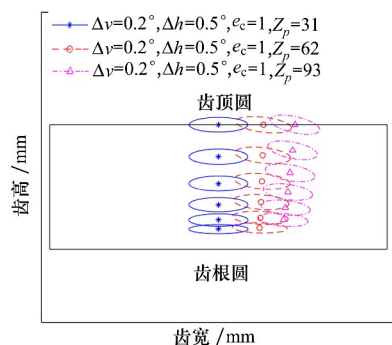


图14 齿数对接触区域的影响

4 结论

1) 中心距误差对齿轮接触区域影响最小,只会改变变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副的重合度和接触点的径向位置,但不会改变接触区域的大小。

2) 轴平行度误差是影响变双曲圆弧齿线圆柱齿轮副传动特性的重要因素,很大程度上影响了齿轮副接触区域的位置,且垂直轴向误差相较于水平轴向误差对接触区域的影响更为敏感,在齿轮装配时应尽量避免产生过大的安装误差,以保证齿轮副的良好接触性能。

3) 齿线半径是变双曲圆弧齿线圆柱齿轮传动的主要设计参数,刀盘半径对接触区域的大小和位

置均有不同程度上的影响,对接触区域大小的影响尤为严重,在选取齿线半径时应根据装配条件及其他设计参数来合理选取刀盘半径的值,以确保在获得较大接触区域的同时降低齿轮副对安装误差的敏感度。

4) 齿数会对接触区域的分布产生影响,但是其对接触区域的敏感度较低。模数是影响接触区域的高敏感性参数,模数的变化不仅会影响接触区域的大小和接触迹线的位置,还会改变变齿轮的齿全高,需根据齿轮副对传动性能的具体要求进行合理选取。

经由上述分析齿线半径、模数及水平轴向误差和垂直轴向误差对接触区域敏感性较高,中心距误差及齿数对接触区域敏感性低。

参考文献:

[1] 陈帅, 侯力, 汤梦, 等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮动态接触特性分析[J]. 机械传动, 2018, 42(9): 85-89

CHEN Shuai, HOU Li, TANG Meng, et al. Dynamic contact characteristic analysis of cylindrical gear with variational hyperbola

- and circular-arc-tooth-trace[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2018, 42(9): 85-89 (in Chinese)
- [2] 蒋进科, 刘钊, 彭先龙. Ease-off 修形准双曲面齿轮减振优化设计[J]. *华南理工大学学报*, 2020, 48(5): 138-145
JIANG Jinke, LIU Zhao, PENG Xianlong. Optimization design of vibration reduction for hypoid gears with ease-off flank modification[J]. *Journal of South China University of Technology*, 2020, 48(5): 138-145 (in Chinese)
- [3] LITVIN F L, FUENTES A. *Gear geometry and applied theory*[D]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [4] TSENG J T, TSAY C B. Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by a hob cutter[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(5): 271-277
- [5] 李仕轩, 陈兵奎, 陈永洪. 渐开线圆柱蜗杆与斜齿轮传动副接触特性分析[J]. *重庆大学学报*, 2020, 43(10): 29-37
LI Shixuan, CHEN Bingkui, CHEN Yonghong. Contact characteristics analysis of involute cylindrical worm and helical gear transmission[J]. *Journal of Chongqing University*, 2020, 43(10): 29-37 (in Chinese)
- [6] CHEN Z, ZENG M, FUENTES-AZNAR A. Computerized design, simulation of meshing and stress analysis of pure rolling cylindrical helical gear drives with variable helix angle[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 153: 103962
- [7] 蒋进科, 方宗德, 苏进展. 斜齿轮实际齿面接触分析技术[J]. *西北工业大学学报*, 2013, 31(6): 921-925
JIANG Jinke, FANG Zongde, SU Jinzhan. Tooth contact analysis(TCA) of real helical gear tooth surface[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2013, 31(6): 921-925 (in Chinese)
- [8] 彭先龙, 胡锡文, 方宗德. 构造拓扑修形齿面的面齿轮传动主动设计[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(5): 1216-1222
PENG Xianlong, HU Xiwen, FANG Zongde. Active design of face gear drive for modifying ease-off topology flank[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(5): 1216-1222 (in Chinese)
- [9] 周如传, 赵宁, 李旺, 等. 锥形面齿轮副的几何展成及轮齿接触分析[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(7): 86-95
ZHOU Ruchuan, ZHAO Ning, LI Wang, et al. TCA and stress analysis of the face gear drive with a tapered involute pinion[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(7): 86-95 (in Chinese)
- [10] 赵宁, 翟佳, 侯少杰, 等. 面齿轮磨削温度场分析[J]. *机械传动*, 2019, 43(6): 18-22
ZHAO Ning, ZHAI Jia, HOU Shaojie, et al. Temperature field analysis of grinding face gear[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2019, 43(6): 18-22 (in Chinese)
- [11] 贺鹏, 刘光磊. 面齿轮传动安装误差特性研究[J]. *机械科学与技术*, 2008(1): 92-95
HE Peng, LIU Guanglei. Tooth contact analysis of face-gear meshing[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2008(1): 92-95 (in Chinese)
- [12] 董淑婧. 基于 MATLAB 弧齿锥齿轮接触分析[J]. *机械强度*, 2016, 38(2): 410-413
DONG Shujing. Contact analysis of the spiral bevel gear based on MATLAB[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2016, 38(2): 410-413 (in Chinese)
- [13] 苏进展, 方宗德, 崔艳梅. 弧线齿面齿轮齿面接触分析[J]. *航空学报*, 2011, 32(3): 546-551
SU Jinzhan, FANG Zongde, CUI Yanmei. Tooth contact analysis on face gears with arcuate tooth[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(3): 546-551 (in Chinese)
- [14] LIU G, FAN H. Pinion tooth surface generation strategy of spiral bevel gears[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 25(4): 753-759
- [15] 王星, 方宗德, 李声晋, 等. HGT 准双曲面齿轮传动的轮齿接触分析[J]. *西北工业大学学报*, 2014, 32(3): 475-480
WANG Xing, FANG Zongde, LI Shengjin, et al. Tooth contact analysis of HGT hypoid gear drives[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2014, 32(3): 475-480 (in Chinese)
- [16] 杜进辅, 方宗德, 宁程丰, 等. 克林贝格准双曲面齿轮齿面建模及接触分析[J]. *西北工业大学学报*, 2015, 33(2): 222-228
DU Jinfu, FANG Zongde, Ning Chengfeng, et al. Tooth surface modeling and contact analysis of Klingelnberg hypoid gear[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2015, 33(2): 222-228 (in Chinese)
- [17] 江平, 刘光磊, 张瑞庭, 等. 航空弧齿锥齿轮接触印痕高度的一种控制方法[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(5): 64-70
JIANG Ping, LIU Guanglei, ZHANG Ruiting, et al. A method to control the contact pattern height of spiral bevel gears in aviation[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(5): 64-70 (in Chinese)
- [18] 张瑞亮, 王铁, 李红梅. 双圆弧弧齿锥齿轮齿面接触分析[J]. *机械设计*, 2011, 28(7): 80-83
ZHANG Ruiliang, WANG Tie, LI Hongmei. Tooth surface contact analysis of the double circular arc tooth spiral bevel gear[J].

- Journal of Machine Design, 2011, 28(7): 80-83 (in Chinese)
- [19] 何昕, 曹雪梅. 等基圆齿锥齿轮啮合性能分析[J]. 机械传动, 2019, 43(11): 102-105
HE Xin, CAO Xuemei. Analysis of meshing performance for equal base circle bevel gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(11): 102-105 (in Chinese)
- [20] 朱晟平. 圆弧齿廓弧线齿面齿轮设计方法及啮合特性分析[D]. 天津: 天津工业大学, 2019
ZHU Shengping. Design method and meshing characteristic analysis of arc tooth profile arc tooth surface gear[D]. Tianjin: Tiangong University, 2019 (in Chinese)
- [21] 赵斐, 侯力, 段阳, 等. 旋转刀盘圆弧齿轮成形理论分析及数字化建模研究[J]. 四川大学学报, 2016, 48(6): 119-125
ZHAO Fei, HOU Li, DUAN Yang, et al. Research on the forming theory analysis and digital model of circular arc gear shaped by rotary cutter[J]. Advanced Engineering Sciences, 2016, 48(6): 119-125 (in Chinese)
- [22] 陈兵奎, 高艳娥, 梁栋. 共轭曲线齿轮齿面的构建[J]. 机械工程学报, 2014, 50(3): 18-24
CHEN Bingkui, GAO Yan'e, LIANG Dong. Tooth profile generation of conjugate-curve gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(3): 18-24 (in Chinese)
- [23] WANG X L, LU J W, YANG S Q. Sensitivity analysis and optimization design of hypoid gears' contact pattern to misalignments [J]. Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering), 2019, 20(6): 411-430
- [24] 王会良, 邓效忠, 徐恺, 等. 考虑安装误差的拓扑修形斜齿轮承载接触分析[J]. 西北工业大学学报, 2014, 32(5): 781-786
WANG Huiliang, DENG Xiaozhong, XU Kai, et al. Load tooth contact analysis (LTCA) of helical gears using topographic modification and installation errors[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2014, 32(5): 781-786 (in Chinese)
- [25] GUO R, WEI Y Q, LIU Y P, et al. Analytical solution to contact characteristics for a variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gear[J]. Mechanical Sciences, 2021, 12(2): 923-932
- [26] 魏冰阳, 邓效忠, 仝昂鑫, 等. 曲面综合法弧齿锥齿轮加工参数计算[J]. 机械工程学报, 2016, 52(01): 20-25
WEI Bingyang, DENG Xiaozhong, TONG Angxin, et al. Surface synthesis method on generating parameters computation of spiral bevel-gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 20-25 (in Chinese).
- [27] 魏永峭, 马登秋, 吴阳, 等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面曲率特性研究[J]. 工程科学与技术, 2017, 49(6): 196-203
WEI Yongqiao, MA Dengqiu, WU Yang, et al. Study on the tooth surface and curvature characteristics of cylindrical gear with variable hyperbolic arc-tooth-trace[J]. Advanced Engineering Sciences, 2017, 49(6): 196-203 (in Chinese)
- [28] 刘光磊, 樊红卫, 谷霁红, 等. 航空弧齿锥齿轮低噪声和低安装误差敏感性设计[J]. 航空发动机, 2010(2): 9-12
LIU Guanglei, FAN Hongwei, GU Jihong, et al. Sensitivity design of low noise and installation error for aero spiral bevel gear [J]. Aeroengine, 2010(2): 9-12 (in Chinese)

Geometric contact characteristics and sensitivity analysis of
variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical
gear with error theory considered

WEI Yongqiao¹, LI Zeyu¹, LIU Yongping¹, GUO Rui¹, YANG Dong¹,
LUO Lan¹, CHEN Zhongmin²

(1.School of Mechanical & Electronical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;)
(2.R & D Center of Sichuan Jian'an Industry Co., Ltd, Yaan 625100, China)

Abstract: Gear transmission characteristics are the most important research contents in gear transmission, and contact characteristics are important factors that affect gear transmission performance. The establishment of tooth surface contact analysis (TCA) model of a gear pair plays a guiding role in analyzing its contact characteristics. The rotary surface equation of the variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace (VH-CATT) cylindrical gear cutter is obtained with the large cutter forming principle, and the mathematical model of the gear tooth surface is established based on the gear meshing conditions. With the influence of installation error on gear contact performance considered, a TCA model with installation error was established. The influence of different installation errors and different design parameters on the geometric contact characteristics and sensitivity of the gear pair is analyzed. The analysis results show that the central distance error may affect the contact ratio of the VH-CATT cylindrical gear pair and that the shaft parallelism error has a great influence on its transmission characteristics, greatly changing the size and position of the gear pair contact area. The design parameters also affect the size and location of the contact area to various degrees.

Keywords: variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gear; gear contact analysis; installation error; contact trace

引用格式: 魏永峭, 李泽宇, 刘永平, 等. 计及误差理论的变双曲圆弧齿线圆柱齿轮几何接触特性及敏感性分析[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(3): 679-689
WEI Yongqiao, LI Zeyu, LIU Yongping, et al. Geometric contact characteristics and sensitivity analysis of variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace cylindrical gear with error theory considered[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(3): 679-689 (in Chinese)