https://doi.org/10.1051/jnwpu/20224051012

基于误差模型的多约束鲁棒编队控制器的设计

闫党辉, 章卫国, 陈航

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘 要:无人机(unmanned aerial vehicle,UAV)编队是一个复杂的非线性系统,四旋翼无人机虽然具有诸多优点,但是其动力学模型却是非线性、耦合、欠驱动的,并且物理约束、模型的不确定性以及外界干扰等因素会显著降低基于模型控制器的控制性能。因此,针对四旋翼的编队问题,提出了一种基于误差模型的多约束模型预测控制(model predictive control,MPC)策略。利用拉格朗日-欧拉公式建立无人机的三维空间(three-dimensional,3D)模型,并将四旋翼模型分为旋转子系统(rotational subsystem,RS)和平移子系统(translational subsystem,TS),分别针对 2 个子系统设计对应的多约束模型预测控制器,增广模型中嵌入了积分器,因此能够消除外部干扰引起的跟踪误差。相较于通常情况下的 MPC(regular MPC,RMPC),文中所采用的经过修改的 MPC(modified MPC,MMPC),通过对成本函数进行合理修改,不仅能够保证控制器在求解过程中子系统的渐近稳定性,也同时保证了闭环系统的稳定性。在此基础上,对以上算法进行了稳定性分析。仿真结果表明,MMPC 不仅具有编队良好的路径跟踪能力,还能够保证在多约束和干扰存在的情况下,取得良好的控制性能。

关 键 词:多无人机;编队;干扰;多约束;预测控制
中图分类号:V249.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-2758(2022)05-1012-09

无人机系统是目前无人系统领域发展较快、水平较高、实际应用较多的一类空中无人系统,具有成本低、无人员伤亡、操作方便和灵活可靠等特点。与固定翼飞机相比,四旋翼飞机具有许多优点,例如,具备垂直起飞、着陆、悬停,以及室内飞行的能力。随着应用环境的日趋复杂以及任务的日益多样,单机的能力受到了限制,多机的编队协同已经成为无人机应用的重要发展趋势。

然而,四旋翼无人机具有 6 个自由度,却只有 4 个控制输入,因此,其动力学不仅是非线性的,而且是耦合的、欠驱动的,很难被控制。此外,无人机在编队飞行的过程中,会受到阵风、湍流和其他的外界干扰,且考虑到四旋翼离散动力学的特征值位于单位圆的边界上,因此,需要一种先进的控制策略来实现自主编队飞行的稳定,使编队具有较高的可操作性和对外界干扰的鲁棒性。为此,人们做了很多努力,并制定了一些策略来解决这类系统在编队飞行过程中遇到的问题。

近年来,已经提出了几种策略来应对以上提出的一些问题。Guzey 等[1]开发了一种基于非线性输出反馈神经网络的一致性控制器。Yan 等[2]提出了基于一致性的双闭环滑模编队控制器。魏扬等[3]考虑闭环系统存在时变干扰的情况下,设计了用于无人机编队保持的自适应控制器。Zhen 等[4]解决了干扰和不确定性存在时,编队飞行中无人机的速度和姿态协同控制问题。Ille 等[5]设计了分布式 MPC 用于跟踪给定的参考轨迹,并用惩罚因子来避免编队内碰撞的发生。Chevet 等[6]提出基于 MPC 的编队重构算法,不仅允许损坏的无人机离开编队,还允许恢复的无人机重新加入当前编队,同时避免碰撞。Cai 等[7]研究了一种用于多无人机编队控制的事件触发 MPC 方案,可以减少分布式 MPC 方案的计算负担。Huang 等[8]提出了一种基于卡尔曼滤波和 MPC 的协同避碰方法,指导多架无人机协同避碰决策。Wolfe 等[9]设计和测试了用于编队飞行跟踪的分布式多模型 MPC 控制器。Rosa 等[10]在非

收稿日期:2021-12-08 **基金项目**:国家自然科学基金(62073266)与陕西省飞行控制与仿真技术重点实验室资助
作者简介:闫党辉(1987—),西北工业大学博士研究生,主要从事无人机编队控制研究。e-mail:yandh@mail.nwpu.edu.cn

线性 MPC 的框架下,设计了一种具有避障功能的编队飞行控制器。

MPC 是解决约束问题最有效的控制方法之一,它还可以通过多变量耦合实现多目标最优控制[11]。但是,无人机的离散时间模型是临界稳定的,在 MPC 的滚动优化过程中,这种临界稳定性可能会进一步恶化,这是被许多研究所忽略的。本文针对编队中无人机的 TS 和 RS 分别设计多约束预测模型控制器,以实现多约束和干扰存在的情况下,编队的最优控制和对于规划路径较好的跟踪;此外,通过对预测控制的成本函数进行适当地修改,不仅可以改善 MPC 计算中的数值问题,而且可以确保最优计算过程中闭环系统的稳定性。

1　四旋翼动力学模型及编队算法

1.1　考虑干扰的四旋翼动力学模型

本文考虑的四旋翼结构是完全相同的。其动力学模型可以通过拉格朗日-欧拉的方法获得。这里,考虑干扰因素的四旋翼非线性数学模型为[12]

$$\begin{cases}\ddot{\varphi} = \dot{\theta}\dot{\psi}a_1 + \dot{\theta}a_2\Omega_r + b_1U_2 + d_1\\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}\dot{\varphi}a_3 - \dot{\varphi}a_4\Omega_r + b_2U_3 + d_2\\ \ddot{\psi} = \dot{\varphi}\dot{\theta}a_5 + b_3U_4 + d_3\\ \ddot{x} = u_x \cdot U_1/m + d_4\\ \ddot{y} = u_y \cdot U_1/m + d_5\\ \ddot{z} = g - u_z \cdot U_1/m + d_6\end{cases} \tag{1}$$

式中:(φ,θ,ψ) 为四旋翼的3个姿态的欧拉角,分别代表滚转角、俯仰角和偏航角;(x,y,z) 为四旋翼的质心在惯性坐标系中的位置坐标;m 为四旋翼无人机的总质量;g 是重力加速度;$U_i(i=1,2,3,4)$ 为对应的控制输入;Ω_r 为螺旋桨角速度残差;$d_i(i=1,2,\cdots,6)$ 表示外部扰动的集合,且 $|d_i| \leqslant D_i$,$D_i(i=1,2,\cdots,6)$ 为有界正实数。$a_j(j=1,2,3,4,5)$,$b_k(k=1,2,3)$,u_x,u_y 和 u_z 的表达式如(2) ~ (3) 所示

$$\begin{cases}a_1 = (I_y - I_z)/I_x\\ a_2 = J_r/I_x\\ a_3 = (I_z - I_x)/I_y\\ a_4 = J_r/I_y\\ a_5 = (I_x - I_y)/I_z\end{cases}\quad \begin{cases}b_1 = l_a/I_x\\ b_2 = l_a/I_y\\ b_3 = l_a/I_z\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}u_x = \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\\ u_y = \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\\ u_z = \cos\varphi\cos\theta\end{cases} \tag{3}$$

J_r 为四旋翼的每个旋翼末端到飞行器重心的距离;(I_x,I_y,I_z) 分别为围绕每个轴的转动惯量;l_a 为转子的悬臂长度。

1.2　模型的离散化

由(1)式可以看出,前 3 个方程描述了四旋翼的旋转动力学,后面 3 个方程表示平移动力学,因此可以将(1)式分成 RS 和 TS。对于第 i 个无人机的 RS,在同时考虑干扰和不确定性的情况下,线性时变离散状态空间模型为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{i,R}(k+1) = \boldsymbol{A}_{i,R}\boldsymbol{X}_{i,R}(k) + \boldsymbol{B}_{i,R}\boldsymbol{U}_{i,R}(k) + \\ \quad \boldsymbol{B}_{D,R}\boldsymbol{D}_{i,R}(k)\\ \boldsymbol{Y}_{i,R}(k+1) = \boldsymbol{C}_{i,R}\boldsymbol{X}(k+1)\end{cases} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{X}_{i,R}(k) = [\varphi(k),\dot{\varphi}(k),\theta(k),\dot{\theta}(k),\psi(k),\dot{\psi}(k)]^{\mathrm{T}}$ 为RS的状态向量,$\boldsymbol{U}_{i,R}(k) = [U_{i,2},U_{i,3},U_{i,4},\Omega_{i,r}]^{\mathrm{T}}$ 为控制输入向量,$\boldsymbol{D}_{i,R}(k) = [0,d_{i,R,1}(k),0,d_{i,R,2}(k),0,d_{i,R,3}(k)]^{\mathrm{T}}$ 为未知干扰的集合。当 RS 的采样时间为 T_R 时,(4) 式中的矩阵 $\boldsymbol{A}_{i,R}$,$\boldsymbol{B}_{i,R}$,$\boldsymbol{B}_{D,R}$ 和 $\boldsymbol{C}_{i,R}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_{i,R} = \begin{bmatrix}1 & T_R & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & a_1T_R\dot{\psi} & 0 & a_1T_R\dot{\theta}\\ 0 & 0 & 1 & T_R & 0 & 0\\ 0 & a_3T_R\dot{\psi} & 0 & 1 & 0 & a_3T_R\dot{\varphi}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_R\\ 0 & a_5T_R\dot{\theta} & 0 & a_5T_R\dot{\varphi} & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}_{i,R} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ T_Rb_1 & 0 & 0 & T_Ra_2\dot{\theta}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & T_Rb_2 & 0 & -T_Ra_4\dot{\theta}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & T_Rb_3 & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}_{D,R} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & T_R & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & T_R & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_R\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C}_{i,R} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

同理,对于第 i 个无人机的 TS,其离散线性化时变模型为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{i,T}(k+1)=\boldsymbol{A}_{i,T}\boldsymbol{X}_{i,T}(k)+\boldsymbol{B}_{i,T}\boldsymbol{U}_{i,T}(k)+\\ \qquad \boldsymbol{B}_{D,T}\boldsymbol{D}_{i,T}(k)\\ \boldsymbol{Y}_{i,T}(k+1)=\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{X}(k+1)\end{cases} \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{X}_{i,T}(k)=[x(k),\dot{x}(k),y(k),\dot{y}(k),z(k),\dot{z}(k)]^{\mathrm{T}}$ 表示 TS 的状态向量,$\boldsymbol{U}_{i,T}(k)=[U_{i,x},U_{i,y},U_{i,z}]=[u_xU_{i,1},u_yU_{i,1},mg-u_zU_{i,1}]^{\mathrm{T}}$ 表示 TS 的控制输入向量,$\boldsymbol{D}_{i,T}(k)=[0,d_{i,T,4}(k),0,d_{i,T,5}(k),0,d_{i,T,6}(k)]^{\mathrm{T}}$ 为未知干扰的集合。当 TS 的采样时间为 T_T 时,(6) 式中矩阵 $\boldsymbol{A}_{i,T},\boldsymbol{B}_{i,T},\boldsymbol{B}_{D,T}$ 和 $\boldsymbol{C}_{i,T}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_{i,T}=\begin{bmatrix}1&T_T&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&T_T&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&T_T\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B}_{i,T}=\begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{T_T}{m}&0&0\\0&0&0\\0&\frac{T_T}{m}&0\\0&0&0\\0&0&\frac{T_T}{m}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}_{D,T}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&T_T&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&T_T&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&T_T\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{C}_{i,T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{13}$$

1.3 一致性编队算法

考虑 n 个相同的 UAV 的编队,每个 UAV 由 V_i ($i\in\{1,2,\cdots,n\}$) 表示。它们构成有向图 $\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{V},\boldsymbol{E}\}$,其中 $\boldsymbol{V}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$ 是 UAV 节点的集合,$\boldsymbol{E}\subseteq\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}$ 为图的边集,其中图的边集由 e_{ij} 表示。表示 V_i 和 V_j 之间可以相互获得彼此的位置和速度信息。a_{ij} 表示节点 V_i 和 V_j 之间连接的权重,$a_{ij}=1$ 表示节点 V_i 可以收到节点 V_j 的信息,否则 $a_{ij}=0$。V_i 的邻点集合由 $\boldsymbol{N}_i=\{V_j\in\boldsymbol{V}:e_{ij}\in\boldsymbol{E}\}$ 表示。

以 TS 的 x 轴方向为例

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\dot{x}_i\\ \ddot{x}_i=\dfrac{U_{i,x}}{m}\end{cases} \tag{14}$$

式中,在只考虑定拓扑结构的系统时,(14)式的一致性控制律为[12]

$$U_{i,x}(t)=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[k_1(x_i(t)-x_j(t)-p_{ij})] \quad (i=1,\cdots,n) \tag{15}$$

式中,p_{ij} 为第 i 个无人机和第 j 个无人机之间的距离。$k_1>0$。同理可以得到另外 2 个轴向的一致性控制律。

2 多约束 MPC 的设计

本文设计的主要目标是实现无人机编队的稳定和航迹跟踪,而多无人机编队是一个多约束的复杂系统,因此,可以采用 MPC 的方法进行求解。在本节中,分别针对每个 UAV 的 TS 和 RS 设计对应的 MPC,以保证 UAV 的稳定性和路径跟踪能力。如上一节所述,TS 通过 u_x,u_y 和 u_z 决定了四旋翼的参考方向。因此,首先对 TS 进行 MPC 的设计。

对于编队中第 i 个 UAV,以 TS 为例,考虑干扰情况下的差分模型为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_{i,T}(k+1)-\boldsymbol{X}_{i,T}(k)=\\&\quad\boldsymbol{A}_{i,T}(\boldsymbol{X}_{i,T}(k)-\boldsymbol{X}_{i,T}(k-1))+\\&\quad\boldsymbol{B}_{i,T}(\boldsymbol{U}_{i,T}(k)-\boldsymbol{U}_{i,T}(k-1))+\\&\quad\boldsymbol{B}_{i,D,T}(\boldsymbol{D}_{i,T}(k)-\boldsymbol{D}_{i,T}(k-1))\end{aligned} \tag{16}$$

定义 $\Delta\boldsymbol{X}_{i,T}(k)=\boldsymbol{X}_{i,T}(k)-\boldsymbol{X}_{i,T}(k-1)$,$\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k)=\boldsymbol{U}_{i,T}(k)-\boldsymbol{U}_{i,T}(k-1)$,从而,可以得出一个新的增广系统为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+1)=\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k)+\\ \qquad\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k)+\hat{\boldsymbol{B}}_{i,D,T}\boldsymbol{\varepsilon}(k)\\ \boldsymbol{Y}_{i,T}(k+1)=\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+1)\end{cases} \tag{17}$$

式中:$\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{i,T}&\boldsymbol{0}_{6\times3}\\\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{A}_{i,T}&\boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix}$;$\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{i,T}\\\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{B}_{i,T}\end{bmatrix}$,$\hat{\boldsymbol{B}}_{i,d,T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{i,d,T}\\\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{B}_{i,d,T}\end{bmatrix}$,$\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+1)=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{X}_{i,T}(k+1)\\\boldsymbol{Y}_{i,T}(k+1)\end{bmatrix}$,$\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}=[\boldsymbol{0}_{3\times6}\quad\boldsymbol{I}_{3\times3}]$,$\boldsymbol{\varepsilon}(k)=\boldsymbol{D}_{i,T}(k)-\boldsymbol{D}_{i,T}(k-1)$。

这里,假设 $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ 为白噪声的集合,由于在 MPC 的计算中使用的是状态量的期望值,可以认为 $\boldsymbol{\varepsilon}(k)=0$。用 $N_{c,T}$ 表示未来控制量个数,$N_{p,T}$ 表示预测域长度,则 k 时刻的控制量和输出的预测值分别表示为 $\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}(k)=[\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k),\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+1),\cdots,\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+N_{c,T}-1)]$,$\hat{\boldsymbol{Y}}_{i,T}(k)=[\boldsymbol{Y}_{i,T}(k+1\mid k),\boldsymbol{Y}_{i,T}(k+2\mid k),\cdots,\boldsymbol{Y}_{i,T}(k+N_{p,T}\mid k)]$,从而,未来状态的预测方程为

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_{i,T}(k)=\boldsymbol{F}_{i,T}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k\mid k)+\boldsymbol{H}_{i,T}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}(k) \tag{18}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{F}_{i,\xi}$ 和 $\boldsymbol{H}_{i,\xi}$ 分别为

$$\boldsymbol{F}_{i,T}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{2}\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{3}\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{N_{p,T}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_{i,T}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & 0 & \cdots & 0\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{N_{p,T}-1}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{N_{p,T}-2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{N_{p,T}-3}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T} & \cdots & \hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{N_{p,T}-N_{c,T}}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\end{bmatrix} \tag{19}$$

约束模型预测控制的本质是通过求解最优控制轨迹 $\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}$ 来最小化给定时间 k 的成本函数 $J_{i,T}(k)$。当然,这种最小化是基于 $J_{i,T}(k)$ 受到一系列线性不等式约束下的实时优化,通常,这些约束可以表示为文献[13]中的形式。假如在 k 时刻,取新的状态向量矩阵为 $\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+i\mid k)=[\Delta\boldsymbol{X}_{i,T}(k+i\mid k);\boldsymbol{Y}(k+i\mid k)-(\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{r}_s(k+1\mid k))]$,其中,$\boldsymbol{r}_s(k\mid k)=[x_r(k\mid k);\dot{x}_r(k\mid k);y_r(k\mid k);\dot{y}_r(k\mid k);z_r(k\mid k);\dot{z}_r(k\mid k)]$ 为期望的状态,$J_{i,T}(k)$ 和线性不等式约束的定义如下

$$\begin{aligned}\min_{\Delta U_{i,T}} J_{i,T}(k)=&\sum_{i=1}^{N_{p,T}}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+i\mid k)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}_{i,T}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+i\mid k)+\\ &\sum_{j=0}^{N_{c,T}-1}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+j)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}_{i,T}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+j)\\ \text{subject to: }&\boldsymbol{M}_{i,T}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}_{i,T}\end{aligned} \tag{20}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{Q}}_{i,T}=\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{C}}_{i,T}$;$\hat{\boldsymbol{Q}}_{i,T}>0$;$\bar{\boldsymbol{R}}_{i,T}\geqslant 0$;$M_{i,T}$ 的行数和列数分别与约束的个数以及 $\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k)$ 的元素个数相同;$\boldsymbol{\gamma}_{i,T}$ 为转换后的约束矩阵[13]。以上最优化存在的前提是满足 Kuhn-Tucker 条件。为求解上述优化问题,得到(21)式所示的拉格朗日形式

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T},\boldsymbol{\lambda}_{i,T}} L_{i,T}(\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T},\boldsymbol{\lambda}_{i,T})=&\\ (\boldsymbol{R}_{s,T}-\bar{\boldsymbol{Y}}_{i,T})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}(\boldsymbol{R}_{s,T}-\bar{\boldsymbol{Y}}_{i,T})+&\\ \Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{i,T}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}+\boldsymbol{\lambda}_{i,T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{i,T}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}-\boldsymbol{\gamma}_{i,T})&\end{aligned} \tag{21}$$

式中:$\boldsymbol{R}_{s,T}(k\mid k)=[(\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{r}_s(k+1\mid k)),(\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{r}_s(k+2\mid k)),\cdots,(\boldsymbol{C}_{i,T}\boldsymbol{r}_s(k+N_p\mid k))]$ 为期望的输出矩阵,$\bar{\boldsymbol{Y}}_{i,T}(k)=\boldsymbol{F}_{i,T}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k\mid k)+\boldsymbol{H}_{i,T}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}(k)$。$\boldsymbol{Q}_{i,T}$ 和 $\boldsymbol{R}_{i,T}$ 是由矩阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}_{i,T}$ 和 $\bar{\boldsymbol{R}}_{i,T}$ 组成的对角块阵。这里假设期望轨迹是缓慢变化的,即 $\Delta\boldsymbol{r}_s(k)=\boldsymbol{r}_s(k+i+1\mid k)-\boldsymbol{r}_s(k+i\mid k)\approx 0,(i=1,\cdots,N_p)$,将 $\bar{\boldsymbol{Y}}_{i,T}(k)$ 代入(21)式中可以得到

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T},\lambda_{i,T}} L_{i,T}(\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T},\boldsymbol{\lambda}_{i,T})=&\\ \Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}\boldsymbol{H}_{i,T}+\boldsymbol{R}_{i,T})\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}+&\\ 2\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}(\boldsymbol{F}_{i,T}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k\mid k)&\\ -\boldsymbol{R}_{s,T})+\boldsymbol{\lambda}_{i,T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{i,T}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}-\boldsymbol{\gamma}_{i,T})&\end{aligned} \tag{22}$$

在考虑 $\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{i,T}$ 的情况下,求解最优控制和拉格朗日乘子为:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}(k)=&-(\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}\boldsymbol{H}_{i,T}+\boldsymbol{R}_{i,T})^{-1}(\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}\\ &\left(\boldsymbol{F}_{i,T}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k\mid k)-\boldsymbol{R}_{s,T}(k\mid k))+\frac{\boldsymbol{M}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{i,T}(k)}{2}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_{i,T}(k)=&-2(\boldsymbol{M}_{i,T}(\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}\boldsymbol{H}_{i,T}+\boldsymbol{R}_{i,T})^{-1}\boldsymbol{M}_{i,T}^{\mathrm{T}})^{-1}\\ &(\boldsymbol{\gamma}_{i,T}+\boldsymbol{M}_{i,T}(\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}\boldsymbol{H}_{i,T}+\boldsymbol{R}_{i,T})^{-1}\\ &\boldsymbol{H}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{i,T}(\boldsymbol{F}_{i,T}\bar{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k\mid k)-\boldsymbol{R}_{s,T}(k\mid k)))\end{aligned} \tag{24}$$

在得到最优解后,只有控制序列 $\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}$ 的第一行被用于控制向量中,即下一刻的控制向量可以表示为:$\boldsymbol{U}_{i,T}(k+1)=\boldsymbol{U}_{i,T}(k)+\Delta\bar{\boldsymbol{U}}_{i,T}$。假设参考的偏航角为零,即 $\psi_{i,r}=0$,则第 i 个 UAV 的 TS 在 k 时刻的控制量 $U_{i,1}$ 可以通过(25)式获得

$$U_{i,1}(k)=\sqrt{(U_{i,z}(k)-mg)^2+U_{i,x}^2(k)+U_{i,y}^2(k)} \tag{25}$$

假设 $-\pi/2<\varphi_{i,r},\theta_{i,r}<\pi/2$,通过方程(3)可以推出第 i 个 UAV 的滚转角和俯仰角的参考值 $\varphi_{i,r}$ 和 $\theta_{i,r}$ 分别为

$$\varphi_{i,r}(k)=-\arcsin\left(\frac{U_{i,y}(k)}{U_{i,1}(k)}\right) \tag{26}$$

$$\theta_{i,r}(k)=\arcsin\left(\frac{U_{i,x}(k)}{U_{i,1}(k)\cos(\varphi_{i,r}(k))}\right) \tag{27}$$

最后,对于第 i 个 UAV,在各个时刻传递给转动子系统的参考输入如下

$$\boldsymbol{X}_{i,R,r}(k)=\left[\varphi_{i,r}(k),\frac{\varphi_{i,r}(k)-\varphi_{i,r}(k-1)}{T_T},\theta_{i,r},\frac{\theta_{i,r}(k)-\theta_{i,r}(k-1)}{T_T},0,0\right]^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

同理,可以得到 RS 的最优控制 U_2,U_3,U_4 和 $\boldsymbol{\Omega}_r$,进而应用到 UAV 的非线性动态模型中。

3 稳定性分析

(18)式中存在积分项,因此,如果预测范围较大,则(20)式的最优计算过程中会出现数值问题。从(5)式和(10)式可以看出,系统矩阵的特征值位于单位圆边界附近,这会使数值问题变得更糟[13]。因此,有必要设计适当的控制器,在保证系统闭环稳定性的同时,避免上述的数值问题。本文提出的算法,是在 MPC 算法的基础上作适当的修改,从而实现上述功能。

为了便于分析,以第 i 架无人机的TS为例,对于 $\alpha_T>1$,将 MPC 中的成本函数按以下方式处理

$$\begin{aligned}\min_{\Delta U_{i,T}} J_{i,T}(k)=&\sum_{m=1}^{N_{p,T}}\alpha_T^{-2m}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+m\mid k)^{\mathrm{T}}\cdot\\&\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+m\mid k)+\\&\sum_{j=0}^{N_{c,T}-1}\alpha_T^{-2j}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+j)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+j)\\&\text{subject to: }\boldsymbol{M}_{i,T}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}_{i,T}\end{aligned} \tag{29}$$

式中,由于 $\alpha_T>1$,成本函数中的权重系数会随着预测时间的增加而减小,因此,在进行最优化的计算过程中,相较于成本函数(20)式,修改后的成本函数更加重视当前时间的状态和控制,从而对应一个预测窗口,新的状态序列和增量控制矢量选择为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k)=[\alpha_T^{-1}\hat{X}_{i,T}(k+1\mid k),\alpha_T^{-2}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+2\mid k),\cdots,\alpha_T^{-N_{p,T}}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+N_{p,T}\mid k)^{\mathrm{T}}] \tag{30}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k)=[\alpha_T^0\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k\mid k),\alpha_T^{-1}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+1\mid k),\cdots,\alpha_T^{-(N_{c,T}-1)}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+N_{c,T}-1\mid k)] \tag{31}$$

矩阵 $\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k)$ 和 $\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k)$ 中的元素可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m+1\mid k)=\alpha_T^{-(m+1)}\hat{\boldsymbol{X}}_{i,T}(k+m+1\mid k) \tag{32}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+m\mid k)=\alpha_T^{-m}\Delta\boldsymbol{U}_{i,T}(k+m\mid k) \tag{33}$$

和增广状态空间模型(17)式类似,$\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m+1\mid k)$ 和 $\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+m\mid k)$ 满足

$$\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m+1\mid k)=\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m\mid k)+\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+m) \tag{34}$$

因此,具有多个约束的优化问题可以重新表示为

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\hat{U}_\alpha}J_\alpha(k)=&\sum_{m=1}^{N_{p,T}}\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m\mid k)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m\mid k)+\\&\sum_{j=0}^{N_{c,T}-1}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+j)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+j)\\&\text{subject to: }\boldsymbol{M}_{T,\alpha}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}_{T,\alpha}\end{aligned} \tag{35}$$

式中,$\boldsymbol{M}_{T,\alpha}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{M}_{T,\alpha}=\boldsymbol{M}_T\begin{bmatrix}I&0&\cdots&0\\0&\alpha I&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\alpha^{N_{p,T}}I\end{bmatrix} \tag{36}$$

从(21)式和(29)式可以看出,这 2 个成本函数具有相同的形式,此外,(29)式的最优解与(21)式也一样。因此,如果选择适当的 α_T,则成本函数(29)式可以用于 MPC 的计算过程,同时保证系统矩阵 $\alpha_T^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}$ 的所有特征值都在单位圆内,对应状态空间(34)式是稳定的。当 $N_{P,T}$ 和 $N_{C,T}$ 足够大时,优化问题(29)式等效于离散时间线性二次调节器(DLQR)问题[13]。DLQR 可以由代数 Riccati 方程按相同的权重矩阵 $\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}$ 和 $\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}$ 来进行求解

$$\begin{aligned}&\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}-\boldsymbol{S}_\infty-\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}\cdot\\&\left(\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}+\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}\right)^{-1}\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}+\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}=0\end{aligned} \tag{37}$$

式中对应的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_{T,\alpha}$ 和闭环系统可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{T,\alpha}=(\alpha_T^{-2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\infty\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}+\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T})^{-1}\alpha_T^{-2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\infty\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}\\\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m+1\mid k)=\\\quad\alpha_T^{-1}(\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}-\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\boldsymbol{K}_{T,\alpha})\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m\mid k)\end{cases} \tag{38}$$

因此,可以选择合适的 $\alpha_T>1$,来保证(38)式中的特征根 $\lambda_{\max}\mid\alpha_T^{-1}(\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}-\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}K_{T,\alpha})\mid<1$。而实

际系统的特征值将为 $\lambda_{\max}|(\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}-\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\boldsymbol{K}_{T,\alpha})|<\alpha_T$,这意味着(30)式的修改无法保证实际闭环系统的稳定性。但是,可以通过选择适当的 $\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}$ 和 $\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}$ 来解决这个问题。

定理 1　令 $\sigma_T=\alpha_T^{-1}\beta_T$,$(0<\beta_T<1)$,$\boldsymbol{Q}_\sigma=\sigma^2\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}+(1-\sigma_T^2)\boldsymbol{S}_\infty$,$\boldsymbol{R}_\sigma=\sigma_T^2\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}$,通过选择一个合适的 β_T,(39)式的最优解可以确保闭环系统($\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}$,$\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}$)的稳定性。

$$\min_{\Delta\hat{U}_\alpha}J_\sigma(k)=\sum_{m=1}^{N_{p,T}}\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m|k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\sigma\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m|k)+\sum_{j=0}^{N_{c,T}-1}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_\sigma\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k+j)$$

$$\text{subject to: } \boldsymbol{M}_{T,\alpha}\Delta\hat{\boldsymbol{U}}_\alpha(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}_{T,\alpha}\tag{39}$$

证明　与(35)式类似,(39)式的代数 Riccati 方程为

$$\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}-\boldsymbol{S}_\infty-\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}+\boldsymbol{R}_\sigma\right)^{-1}\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}+\boldsymbol{Q}_\sigma=0\tag{40}$$

将 $\boldsymbol{Q}_\sigma$ 和 $\boldsymbol{R}_\sigma$ 代入(40)式中可以得到

$$\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}-\boldsymbol{S}_\infty-\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\cdot\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\alpha_T}+\frac{\beta_T^2\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}}{\alpha_T^2}\right)^{-1}\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\alpha_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\alpha_T}+\frac{\beta_T^2\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}}{\alpha_T^2}+\boldsymbol{S}_\infty-\frac{\beta_T^2\boldsymbol{S}_\infty}{\alpha_T^2}=0\tag{41}$$

(41)式两边同时乘以 $\alpha_T^2\beta_T^2$,可以得到

$$\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\beta_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\beta_T}-\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\beta_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\beta_T}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\beta_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}}{\beta_T}+\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}\right)^{-1}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}}{\beta_T}\boldsymbol{S}_\infty\frac{\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}}{\beta_T}+\overline{\boldsymbol{Q}}_{i,T}-\boldsymbol{S}_\infty=0\tag{42}$$

式中对应的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_{T,\sigma}$ 和闭环系统为

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{T,\sigma}=(\overline{\boldsymbol{R}}_{i,T}+\beta_T^{-2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\infty\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T})^{-1}\beta_T^{-2}\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\infty\hat{A}_{i,T}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m+1|k)=\\ \quad\beta_T^{-1}(\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}-\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\boldsymbol{K}_{T,\sigma})\hat{\boldsymbol{X}}_\alpha(k+m|k)\end{cases}\tag{43}$$

从(43)式闭环系统方程可以看出,通过选择合适 β_T,能确保特征值 $\lambda_{\max}|(\hat{\boldsymbol{A}}_{i,T}-\hat{\boldsymbol{B}}_{i,T}\boldsymbol{K}_{T,\sigma})|<\beta_T$,也就意味着保证了闭环系统是稳定的。

综上所述,通过(29)式和(39)式对原始成本函数(21)式进行连续变换,等效于在最优化的求解过程中,得到了(43)式所示的最终闭环函数。如前所述,这样做的目的不仅保证最优计算过程中所使用模型的稳定性,而且还能够保证闭环系统的稳定性。

4　仿真结果

以 3 架四旋翼无人机构成的编队为例,这里提出一种围绕半径为 r 的圆构成的正三角形编队,其几何结构如图 1 所示。

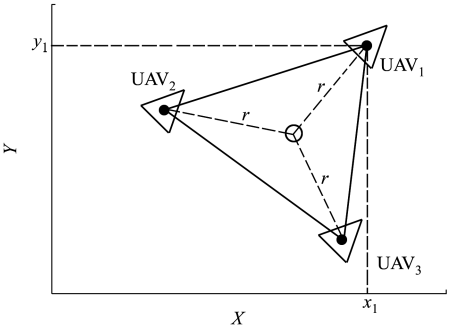


图 1　编队的几何结构和通信拓扑示意图

其中,UAV_1 能够接收所有的指令,其主要任务是跟踪规划好的轨迹。无人机的主要参数见表 1。

表 1　无人机的主要参数

参数	数值
m/kg	0.468
l/m	0.21
J_r/(kg·m^2)	5.51×10^{-5}
I_x/(kg·m^2)	5×10^{-3}
I_y/(kg·m^2)	5×10^{-3}
I_z/(kg·m^2)	8.9×10^{-3}
b/(N·s^2)	2.8×10^{-5}
d/(N·m·s^2)	8×10^{-7}

编队中 3 架无人机初始状态分别为:$X_{1,T}(0)=[3,0,\sqrt{3},0,0.1,0]$;$X_{2,T}(0)=[0,0,2\sqrt{3},0,0.1,0]$;$X_{3,T}(0)=[0,0,0,0,0,0]$,单位:m;$X_{1,R}(0)=X_{2,R}(0)=X_{3,R}(0)=[0,0,0,0,0,0]$,单位:rad。由于物理约束的存在,编队中无人机所受到的约束有:$0\leqslant U_1\leqslant11.23$,$|U_2|\leqslant5.61$,$|U_3|\leqslant5.61$,$|U_4|\leqslant$

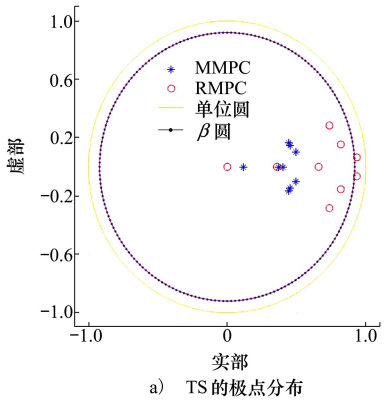
0.16, $-\frac{\pi}{2}<\varphi,\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<\psi<\pi$。仿真中,分别在 10,15,20,25 ~ 30 s,30 s 及以后的时间施加干扰,30 s 之前的干扰值相同,分别为 $d_1=d_2=d_3=3\ \mathrm{rad/s^2}$, $d_4=d_5=d_6=2.7\ \mathrm{m/s^2}$;30 s 及以后的干扰大小为 $d_1=d_2=d_3=0.67\ \mathrm{rad/s^2}$, $d_4=d_5=d_6=0.67\ \mathrm{m/s^2}$。假设 x,y,z 的期望轨迹为 $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$,分别为:

$$R_1(t)=3+t$$

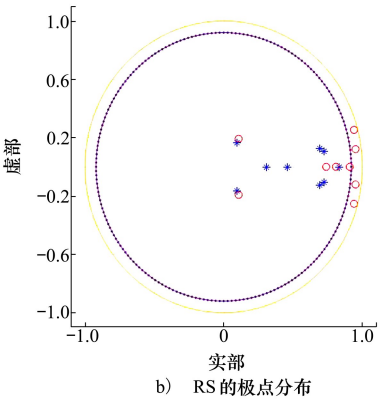
$$R_2(t)=\begin{cases}\sqrt{3}+t, & t\leqslant 10\\ 10+\sqrt{3}, & 10<t\leqslant 50\\ 10+\sqrt{3}+(t-50), & 50<t\leqslant 60\\ 20+\sqrt{3}, & t>60\end{cases}$$

$$R_3(t)=\begin{cases}0.1+t, & t\leqslant 10\\ 10.1, & t>10\end{cases}$$

无人机编队的主要参数为:$k_x=k_y=k_z=0.01$。MPC 在滚动优化过程中的主要参数为:$\hat{\boldsymbol{Q}}_{i,T}=\hat{\boldsymbol{Q}}_{i,R}=1$, $\bar{\boldsymbol{R}}_{i,T}=\bar{\boldsymbol{R}}_{i,R}=0.01\boldsymbol{I}_6$, $\boldsymbol{I}_6$ 表示单位阵, $N_{c,T}=N_{c,R}=1$, $N_{p,T}=10$, $N_{p,R}=4$, $\alpha_T=1.6$, $\beta_T=0.9$, $\alpha_R=1.2$, $\beta_R=0.92$, $r=2$。得到仿真结果如下所示。

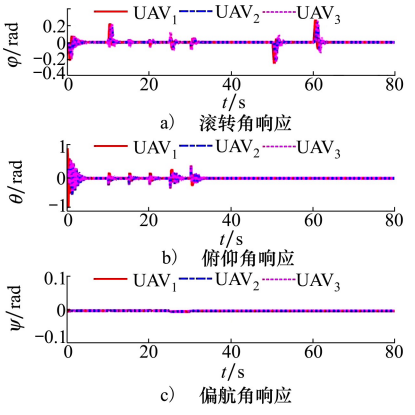


a) TS 的极点分布



b) RS 的极点分布

图 2 TS(a)和 RS(b)闭环系统的极点分布



a) 滚转角响应 b) 俯仰角响应 c) 偏航角响应

图 3 约束条件下编队无人机的角度响应

由图 2 中 2 个子系统的闭环极点分布可以看出,本文 MMPC 不仅能够保证所有闭环极点位于单位圆内,相较于 RMPC,闭环极点能够更靠近原点,也就保证了更多的稳定度。

通过图 3~7 可以看出,虽然干扰的存在对姿态角和三轴轨迹跟踪造成了一定程度的影响,特别是对姿态角影响较为明显,但由于控制器对于干扰存在鲁棒性,使得编队的队形影响较小,且能在很短的时间内恢复到正常状态。

图 8 进一步证明了,本文设计的控制器,能够在很好处理约束的前提下,实现编队稳定的轨迹跟踪和对干扰较好的鲁棒能力。

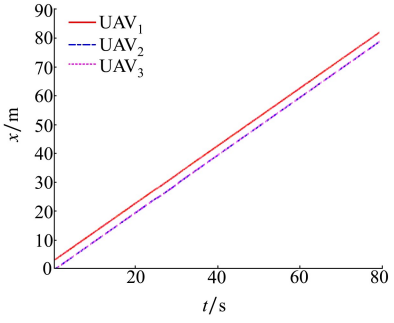


图 4 编队无人机 x 轴的位移

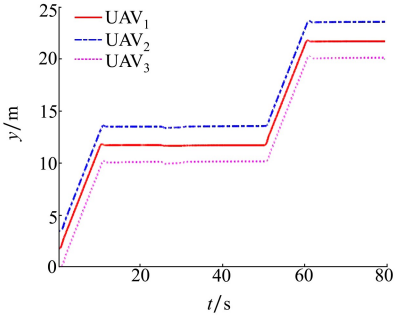


图 5 编队无人机 y 轴的位移

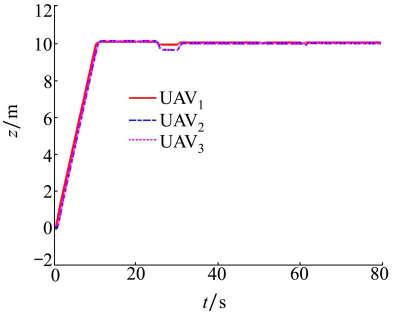


图 6 编队无人机 z 轴的位移

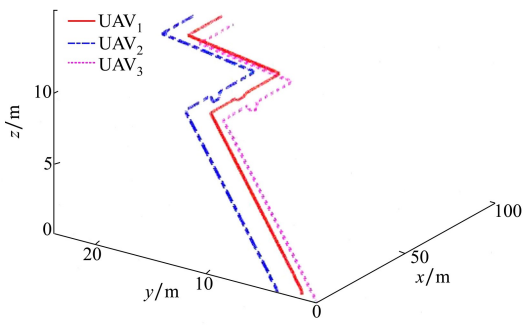


图 7　干扰和约束条件下无人机的轨迹

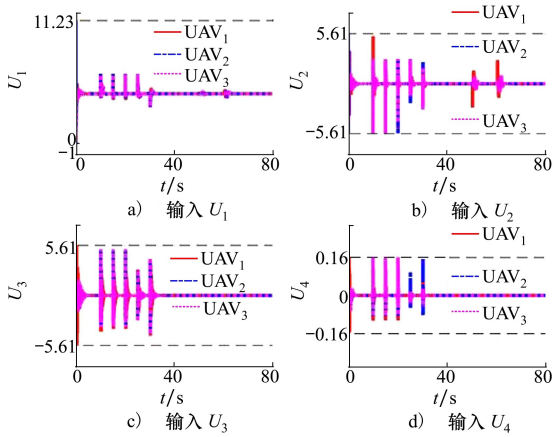


图 8　约束条件下编队无人机的输入

表 2 则可以看出,MMPC 的条件数比 RMPC 的要小很多,证明了 MMPC 能够在实现上述控制效果的同时,计算的复杂度能够大大降低。

表 2　RMPC 和 MMPC 条件数

算法	RS 的条件数	TS 的条件数
RMPC	410	3 462.9
MMPC	243	51.6

5　结　论

本文针对四旋翼的编队问题,提出了一种改进的多约束模型预测控制器,该控制器是基于误差的增广模型进行设计。主要结论如下:

1) 将四旋翼的三维空间模型分为 TS 和 RS,并分别针对 2 个子系统设计相应的多约束 MPC。

2) 通过对成本函数进行合理的修改,不仅保证了滚动优化过程中所使用模型的渐进稳定,还保证了闭环系统的稳定性。

3) 利用增广模型的特点能够消除外部干扰对于无人机路径跟踪的影响。

4) 相较于 RMPC,MMPC 的计算复杂度能够大大降低,并且能够保证在多约束存在的情况下,实现编队较好的路径跟踪。仿真结果也证明了所述方法的有效性。

未来的工作会考虑不确定性、避障和编队重构等问题。

参考文献:

[1] GUZEY H M, DIERKS T, JAGANNATHAN S, et al. Modified consensus-based output feedback control of quadrotor UAV formations using neural networks[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2019, 94(1): 283-300

[2] YAN D, ZHANG W, CHEN H. Research on consensus formation based on double closed-loop sliding mode control[C]//2019 Chinese Control Conference, 2019: 5550-5556

[3] 魏扬, 徐浩军, 薛源. 无人机三维编队保持的自适应抗扰控制器设计[J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(12): 2758-2765

WEI Yang, XU Haojun, XUE Yuan. Adaptive disturbance rejection controller design for UAV 3D formation keeping[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018, 40(12): 2758-2765 (in Chinese)

[4] ZHEN Z, TAO G, XU Y, et al. Multivariable adaptive control based consensus flight control system for UAVs formation[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 93: 105336

[5] ILLE M, NAMERIKAWA T. Collision avoidance between multi-UAV-systems considering formation control using MPC[C]// IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2017: 651-656

[6] CHEVET T, MANIU C S, VLAD C, et al. Voronoi-based UAVs formation deployment and reconfiguration using MPC techniques[C]//2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, 2018: 9-14

[7] CAI Z, ZHOU H, ZHAO J, et al. Formation control of multiple unmanned aerial vehicles by event-triggered distributed model

predictive control[J]. IEEE Access, 2018, 6: 55614-55627

[8] HUANG H, ZHOU H, ZHENG M, et al. Cooperative collision avoidance method for multi-UAV based on Kalman filter and model predictive control[C]//2019 IEEE International Conference on Unmanned Systems and Artificial Intelligence, 2019: 1-7

[9] WOLFE S, GIVIGI S, RABBATH C A. Distributed multiple model MPC for target tracking UAVs[C]//2020 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, 2020: 123-130

[10] ROSA V S M, BELO E M. Virtual structure formation flight control based on nonlinear MPC[C]//2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, 2021: 1383-1390

[11] ZHANG J, SUN T, LIU Z. Robust model predictive control for path-following of under actuated surface vessels with roll constraints[J]. Ocean Engineering, 2017, 143: 125-132

[12] 闫党辉, 章卫国, 陈航, 等. 具有时延和干扰约束的多无人机滑模一致性编队控制研究[J]. 西北工业大学学报, 2020, 38(2):7

YAN Danghui, ZHANG Weiguou, CHEN Hang, et al. Research on multi-UAVs′ sliding mode consensus formation control with delay and disturbance constraints[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2020, 38(2): 7 (in Chinese)

[13] WANG L. Model predictive control system design and implementation using MATLAB[M]. London: Springer Science & Business Media, 2009

Design of multi-constraint robust formation controller based on error model

YAN Danghui, ZHANG Weiguo, CHEN Hang

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: UAVs formation is a complex nonlinear system. Although quadrotor has many advantages, its dynamics model is nonlinear, coupled, and under driven. For model-based controller design, physical constraints, model uncertainties and external disturbances significantly deteriorate control performance. Therefore, a multi-constraints MPC strategy based on error model is proposed for the quadrotor formation. Firstly, a 3D model for quadrotor is established by using the Lagrange-Euler formulation, in which the model is divided into RS and TS. The corresponding multi-constraint MPC is designed for the two subsystems respectively. The tracking errors caused by external disturbances can be eliminated because of the integrator embedded in the augmented model. Comparing with RMPC, by making reasonable modifications to the cost function, the asymptotic stability of the open loop and the closed-loop subsystem can be ensured by MMPC. Moreover, the stability analysis of the above-mentioned algorithm is carried out. The simulation results show that the controller of the formation can not only achieve good path tracking, but also robustness to the multiple constraints and disturbances.

Keywords: multi-UAVs; formation; disturbance; multi-constraints; MPC

引用格式: *闫党辉, 章卫国, 陈航. 基于误差模型的多约束鲁棒编队控制器的设计[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(5): 1012-1020*

YAN Danghui, ZHANG Weiguo, CHEN Hang. Design of multi-constraint robust formation controller based on error model [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(5): 1012-1020 (in Chinese)

© 2022 Journal of Northwestern Polytechnical University.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.