

有限信息下基于证据理论的桁架结构 多目标拓扑优化设计

苏瑜¹, 唐和生²

(1.湖北工业大学 土木建筑与环境学院, 湖北 武汉 430068; 2.同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 不确定信息往往是缺乏的、具有较大的离散性,如何在认知不确定性扰动下保证结构具有良好的稳健性成为多目标拓扑优化设计的技术难题。引入证据理论量化认知不确定,采用基于失效似然度的失效概率区间上限建立新的可靠性指标,将结构总质量和结构可靠性同时作为优化目标,提出了基于证据理论的多目标拓扑优化设计模型。采用无需梯度信息且具有出色非支配策略的多目标并行化微分演化算法求解 Pareto 最优前沿。为了验证所提方法的有效性,以木桁架结构为优化对象,选取木材的弹性模量和结构荷载为不确定变量,采用所提方法进行多目标拓扑优化。根据优化结果制作6榀相同的桁架试件进行随机静力加载试验,通过试验所得的应力及节点位移判断桁架结构的失效概率,以此验证基于证据理论的稳健性拓扑优化方法的可行性。试验结果表明,基于证据理论的优化方法可以避免认知不确定波动造成的优化结果的偏差,为设计人员提供了一种在考虑数据信息不充足、认知水平有限等情况下仍能使优化结果具有稳健性的新方法。

关键词: 认知不确定性;证据理论;桁架结构;多目标优化;并行化计算

中图分类号: TU318; TU323.4

文献标志码: A

文章编号: 1000-2758(2023)04-0722-10

随着科学技术的进步,对于土木建筑结构的要求不断提高,要求具有更高的性能、可靠性及鲁棒性,同时具有更低的资源利用与成本。为了有效地寻求最优折衷解,很多学者^[1-3]致力于研究更快速的算法,以实现结构质量最轻及经济效益最佳等目标,并发展了众多性能优良的确定性多目标优化设计算法。然而,学者们还应该清醒地意识到这些确定性算法在实际应用方面的局限。由于工程材料性质的缺陷性、制作安装误差、结构所处环境的复杂性、结构模型的人为简化以及对实际受力机理认识水平的有限性等因素,结构设计中数据信息和认知水平往往是有限的,这被学者们称为认知不确定性。认知不确定性将会引起结构性能的改变或波动,甚至引起严重的偏差,进而导致最优设计出现意料之外甚至前所未有的功能失效。因此,在结构优化设计中必须考虑不确定性的影响。

从现有的文献来看,所采用的不确定量化方法主要以概率理论为主。随着对认知不确定性的深入研究,一些学者采用非概率方法对荷载和材料参数进行不确定量化。现有研究表明^[4-5],证据理论是一种更为灵活的不确定性建模方法。在数学结构上,证据理论将点值函数形式推广到区间集合函数形式,采用一系列区间数以及分配到区间上的信任度来量化不确定性,以概率区间代替传统概率单点值进行可靠性评估。这更加符合数据信息有限且离散的实际分布情况,并且避免了对精确概率信息的获取和对未知领域过多且无据的假设,在表达和处理不确定性上体现了很好的优势。证据理论可以对随机、模糊、区间等不确定信息进行有效处理,且以概率论为基础的传统可靠性问题只是证据理论的一个特例^[6]。同时,将概率分布离散化为证据理论的数学结构,也为概率参数可靠性建模提供了一种新

收稿日期:2022-09-05

基金项目:国家自然科学基金(51178337)与湖北省自然科学基金青年项目(2018CFB287)资助

作者简介:苏瑜(1985—),湖北工业大学讲师,主要从事不确定量化、结构可靠性分析及优化设计研究。

e-mail:su_jingde@126.com

思路^[7]。近年来,证据理论已成为国际学术界的研究热点之一,国内外学者对不确定性量化表达和非概率可靠性优化设计进行了较多的探索,并取得了一系列研究成果^[8-10]。将合理的证据理论不确定分析方法与先进的仿生智能优化算法相结合而形成的非概率多目标优化方法是当前亟待发展的一种全新的结构设计方法。

桁架结构具有跨越能力大、施工速度快、结构形式活泼新颖以及能够突出人类艺术创造力等优点,被广泛应用于各种跨度的建筑结构、钢桁架桥以及卫星承力结构等工程中。由于桁架结构中各杆件受力均以单向拉、压为主,通过对各杆件进行尺寸优化,对结构形状以及拓扑构形进行合理布置,能够使材料强度得到充分发挥,从而保证结构在满足一定功能要求下获得较大的经济效益,桁架结构也被应用于各种优化算法的寻优性能评价中。正因如此,本文以桁架结构为优化对象,采用证据理论量化结构中出现的 uncertainty,提出了基于证据理论的多目标拓扑优化设计。将结构质量与结构可靠性同时作为优化目标,得到一系列最优折衷解集,决策者根据自己的喜好、结构重要性以及经济预算选择合适的拓扑设计。为了进一步验证本文所提方法的有效性,以木桁架结构为研究对象,选取木材的弹性模量和作用荷载为不确定变量,采用本文所提方法进行多目标拓扑优化设计,根据 Pareto 最优解集中的一组解,制作若干榀相同桁架试件进行随机静力加载试验,并通过得到的荷载-变形关系以及荷载-应变关系,验证基于证据理论的结构可靠性优化设计方法的有效性。

1 基于证据理论的多目标优化设计

1.1 基于证据理论的可靠性优化模型

一般来说,可靠性优化是将结构的可靠性要求作为优化设计的约束条件,采用优化方法寻求结构在概率意义下的最佳设计,即基于概率理论的可靠性优化问题,可表述为:

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d} = [\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{T}] \\ & \min F(\mathbf{d}) \\ & \text{s.t. } P\{g_j(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} < P_f \\ & \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & \quad \underline{\mathbf{d}} \leq \mathbf{d} \leq \bar{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{d}$ 为设计变量,设计变量包括 K 个尺寸变量 $\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_K]$ 、 M 个形状变量 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_M]$ 以及 N 个拓扑变量 $\mathbf{T} = [T_1, T_2, \dots, T_N]$; $\underline{\mathbf{d}}$ 和 $\bar{\mathbf{d}}$ 分别为设计变量取值的下限和上限; F 为目标函数(结构质量); $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ 为 n 维不确定性变量,分别以概率形式表达; g 表示结构极限状态函数; $g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0$ 表示结构发生失效, J 为约束条件的数目; $P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\}$ 表示真实失效概率, P_f 为满足设计要求的失效概率容许值; $P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} < P_f$ 为优化设计的可靠性约束条件。

从公式(1)可以看出,可靠性分析是进行不确定性多目标优化设计的核心内容。然而,在实际结构中对不确定量的认识信息通常是有限的或不充足的,此时,建立精确概率模型非常困难。根据证据理论的不确定量化基本原理^[6]可知,证据理论采用区间集合以及分配在区间上的信任度(basic belief assignment, BBA)来量化参数的不确定性,采用似然函数(belief function, Bel)和信任函数(plausibility function, Pl)来度量结构的可靠概率或失效概率,可以证明 $[P_{\text{Bel}}, P_{\text{Pl}}]$ 是真实概率的区间估计,如(2)式所示,真实的失效概率夹逼在该区间内,即

$$P_{\text{Bel}}\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} \leq P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} \leq P_{\text{Pl}}\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} \quad (2)$$

由此可推出如(3)式所示的结论:

$$P_{\text{Pl}}\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} < P_f \Rightarrow P\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} < P_f \quad (3)$$

故可将 $P_{\text{Pl}}\{g(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0\} < P_f$ 作为传统概率可靠性约束条件的替代模型,形成基于证据理论的广义可靠度优化设计数学模型。

在基于证据理论的结构可靠性优化设计中,结构经济性与结构可靠性呈相互制约的权衡关系,如果能引入多目标优化思想,将用于体现结构经济性的结构质量与用于描述结构可靠性的失效概率指标同时作为优化目标函数,这样就可以在尽可能最小化结构质量的同时,最大化结构的可靠性(最小化结构失效概率)。基于上述稳健性优化思想,本文将基于证据理论不确定测度表达的可靠性约束转化为第二个优化目标,建立了两目标稳健性拓扑优化设计数学模型,其表达式如(4)式所示。

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d} = [\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{T}] \\ & \min F(\mathbf{d}) \\ & \min P_{\text{Pl}_{\max}}(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = \max_{j=1}^J (P_{\text{Pl}}(g_j(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0)), \end{aligned}$$

$$\dots, P_{\text{Pl}}(g_j(\mathbf{d}, \mathbf{u}) < 0))$$

$$\text{subject to } g(\mathbf{d}) \geq 0 \quad (4)$$

式中, $g(\mathbf{d})$ 表示与不确定变量无关的约束函数。

由于证据理论所表达的不确定变量是区间不连续的,其导数很难定义。因此,基于证据理论的多目标可靠性优化设计不能采用传统的以获取梯度信息为导向的优化方法进行求解。近年来,一些基于种群思想的进化算法在多目标优化求解方面取得了丰硕的成果,这些算法不仅不需要导数信息,而且具有并行求解能力,可处理大规模的搜索空间,在单轮优化期间可产生多个非支配解,有效克服了古典方法的局限性。因此,针对证据理论可靠性指标的不连续性,引入智能优化算法克服这一弊端,实现结构性能与可靠性的两目标优化设计的数学模型。

1.2 多目标微分演化算法

多目标微分演化算法(differential evolution for multiobjective optimization, DEMO)采用了与 NSGA-II(non-dominated sorting genetic algorithm)相似的优化机制,并将 DE 算法中优良的寻优机制与快速非支配排序、拥挤距离排序以及精英保留机制相结合,以简便的操作获得分布广泛的 Pareto 最优解集^[11]。因此,本文采用多目标微分演化算法并对其进行并行化改进,以实现公式(4)所示的多目标可靠性优化设计。为了更好地理解 DEMO,本节简单解释算法中的有关操作,并附以图 1 进行形象说明。

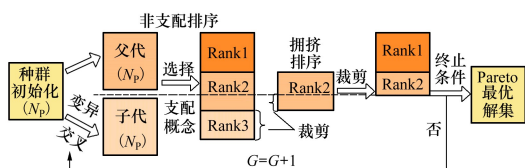


图 1 DEMO 优化流程图

1) 快速非支配排序

当多个目标函数处于冲突状态时,不会存在使所有目标函数同时达到最大或最小的最优解,为此采用“支配”的概念来决定解的好坏。例如,设计变量解 $\mathbf{d}^1$ 和 $\mathbf{d}^2$ 如果满足 2 个条件:① $\mathbf{d}^1$ 的所有目标函数的值不比 $\mathbf{d}^2$ 差;② $\mathbf{d}^1$ 至少有一个目标函数值明确优于 $\mathbf{d}^2$ 。那么 $\mathbf{d}^1$ 支配 $\mathbf{d}^2$ 。若 $\mathbf{d}^1$ 的解没有被其他解所支配,则 $\mathbf{d}^1$ 称为非支配解(Pareto 解)。DEMO 采用与 NSGA-II 相同的非支配排序思想,其过程如下:将一系列设计变量的值定义为种群,种群大小为 N_p 。当代种群中所有非支配个体的等级设为 1,然

后将它们从种群中暂时移去;再在余下的种群中将所有非支配个体的等级设为 2,也暂时移去;如此循环直至所有个体都被赋值。确定进化个体的等级后,就可以对种群进行裁剪,使种群整体向着 Pareto 最优前沿的方向进化^[11]。

2) 多样性保持

保持种群多样性、避免其进化早熟是保证算法收敛到全局 Pareto 最优前沿的有效手段。同 NSGA-II 一样,在 DEMO 中通过计算种群个体在目标空间中相对于同级个体的拥挤距离来保持种群在进化中的多样性。一般而言,拥挤距离越大越好。拥挤距离越小,说明聚拢现象越严重,在同级个体中越先被裁剪。

3) 选择操作

在多目标优化中,需要借用支配的概念^[11],DEMO 选择操作使用以下的原则:①当子代解支配父代时,则子代被选择进入当前种群;②当父代解支配子代时,则子代舍弃,父代被选择;③当父、子二代互不支配时,则均被选择进入当前种群。这种将每代优势解进行选择的做法保证了精英解信息的保存。

4) 种群裁剪

为使在进化中各代种群大小 N_p 保持不变,需要在选择操作后对当前种群进行裁剪。根据非支配分级与计算拥挤距离,选择质量最优的 N_p 个个体进入下一代种群。

重复每一代的这四项操作直至达到设定的最大迭代代数,终止寻优,得到多目标优化问题的最优 Pareto 解集,如图 1 所示。

5) 并行化计算

虽然 DEMO 算法可以克服基于证据理论的多目标可靠性优化设计中难以求导的缺陷,但基于种群思想的一类进化算法普遍存在着计算量大的弊端。分析 DEMO 算法可以发现,它是一种并行搜索算法,对于初始随机生成的种群以及通过后续操作产生的新种群,其评价函数的计算都是相互独立的。可见,DEMO 算法很适合应用并行计算来提高其计算效率。另外,导致不确定优化计算量繁重的另一个原因是证据理论失效似然度(第二个优化目标)的计算。具体来说,就是不确定传播中响应区间极值的求解,同样发现,在每一个区间焦元上求解结构响应下界的过程也是相互独立的,如图 1 中虚线框所示。为了从上述 2 个方面降低 DEMO 求解证据

理论多目标优化问题的计算量,本文在原始的程序中引入并行计算策略,即将一个规模很大的计算任务分配到多个工作空间(worker)中,同时执行各个子工作,从而将原始的相互独立的串联任务转换为并行任务,而多计算资源下解决问题的耗时要小于单个计算资源下的耗时,这必然将提高计算效率。

1.3 基于证据理论的多目标优化设计流程

本节采用证据理论建立了多目标稳健性优化设计,分析流程如图 2 所示。由于图 1 已详细介绍了 DEMO 算法的计算过程,故此处对 DEMO 算法的描述较为简洁。

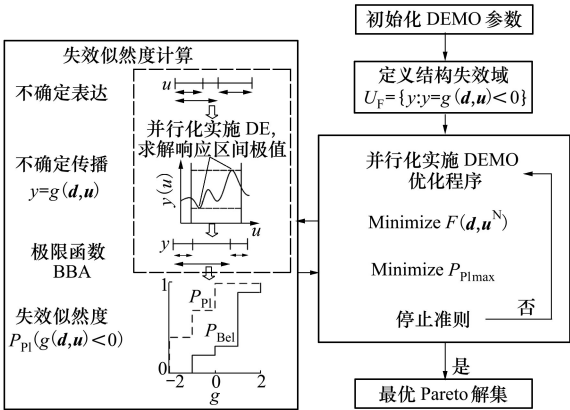


图 2 基于证据理论的多目标可靠性优化设计流程

2 数值测试

本节采用一测试函数来说明证据理论的不确定量化、多目标可靠性优化模型以及并行智能优化算法效率等问题,该测试函数取自文献[12],具体优化问题如(5)式所示

minimize $f(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$

subject to $g_1: 1 - \frac{X_1^2 X_2}{20} \leq 0$

$g_2: 1 - \frac{(X_1 + X_2 - 5)^2}{30} - \frac{(X_1 - X_2 - 12)^2}{120} \leq 0$

$g_3: 1 - \frac{80}{X_1^2 + 8X_2 - 5} \leq 0 \tag{5}$

式中, X_1 和 X_2 视为不确定变量。在实际工程中,数据信息和认知水平往往是不完备的,不确定变量的区间表达以及区间信任度更易于得到,且无任何分布假定。因此,采用证据理论量化不确定变量更为

理想。假定不确定变量的证据理论 BBA 如表 1 所示,表中 $X_{1,N}$ 和 $X_{2,N}$ 分别为优化算法每一次迭代所赋予的值。将该测试问题按照第 1.1 节所述的方法转换为两目标可靠性优化问题,如(6)式所示

$$\min f_1 = f(\mathbf{X}) = X_1 + X_2$$

$$\min f_2 = P_{Pl_{\max}} = \max \{ P_{Pl}(g_1 > 0), P_{Pl}(g_2 > 0), P_{Pl}(g_3 > 0) \}$$

$$0 \leq X_1 \leq 10; 0 \leq X_2 \leq 10 \tag{6}$$

表 1 X_1 和 X_2 的证据理论 BBA 结构

X_1		X_2	
区间	BBA	区间	BBA
$[X_{1,N} - 1.0, X_{1,N} - 0.5]$	0.05	$[X_{2,N} - 1.0, X_{2,N} - 0.5]$	0.05
$[X_{1,N} - 0.5, X_{1,N}]$	0.45	$[X_{2,N} - 0.5, X_{2,N}]$	0.45
$[X_{1,N}, X_{1,N} + 0.5]$	0.45	$[X_{2,N}, X_{2,N} + 0.5]$	0.45
$[X_{1,N} + 0.5, X_{1,N} + 1.0]$	0.05	$[X_{2,N} + 0.5, X_{2,N} + 1.0]$	0.05

采用并行化 DEMO 求解该两目标优化,其参数设置为: $N_p = 25, I_{\max} = 200, F = 0.75, C_R = 0.9$ 。在求解过程中,利用 MATLAB 编程创建多个工作空间进行并行计算,计算机系统处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-4770 CPU。为了对比,分别考虑 4 种情况:无并行计算(1 个 worker)、2 个 worker、3 个 worker、4 个 worker,相应的计算时间汇总于表 2。

表 2 数值测试并行计算效率对比结果

工作空间	CPU 时间/s	加速倍数
1	463	1.0
2	238	1.94
3	168	2.76
4	127	3.65

通过表 2 可以看出,随着工作空间分配的越多,优化程序所用的时间也越少,加速比也越高。可见,并行计算明显地提高了计算效率。另外,将无并行计算的 Pareto 最优解集与采用 4 个 worker 的并行计算结果同时绘于图 3。由图 3 可得,两者的 Pareto

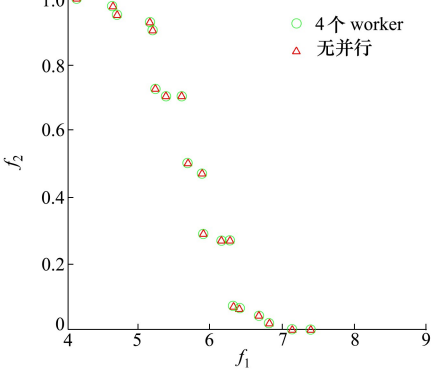


图 3 串联与并行计算结果对比

最优解集是极其接近的,这足以表明并行计算的可行性和有效性。可以想象,在不影响计算精度的前提下,未来多核计算机的快速发展必然会导致并行计算效率的大幅提升,具有并行性质的多目标不确定优化问题将不会受制于计算成本。

3 木桁架结构优化及试验研究

本节采用基于证据理论的不确定优化方法对一初始木桁架桥在弹性模量和荷载均为不确定的情况下进行两目标拓扑优化设计,在 Pareto 最优解集中选取一点并根据其所代表的尺寸、形状以及拓扑信息制作 6 榑相同的桁架试件。对 6 榑木桁架进行随

机静力加载试验,通过 6 榑木桁架杆件的应变和节点位移来验证不确定性优化算法的有效性。

3.1 木材材性试验

试验采用木材为落叶松,为了后续结构优化设计,首先根据相关试验标准对木材标准小试件进行顺纹抗压强度、顺纹抗拉强度和抗弯弹性模量 3 项木材性能试验,试件加载过程见图 4。根据木材性能试验可得木材顺纹抗压强度设计值 f_c 为 14.7 N/mm^2 ,顺纹抗拉强度设计值 f_t 为 24.5 N/mm^2 ,木材弹性模量 E 的均值为 $13\,200\text{ N/mm}^2$ 。由于本文将木材弹性模量视为认知不确定,故仅给出木材弹性模量的数据信息,如表 3 所示。

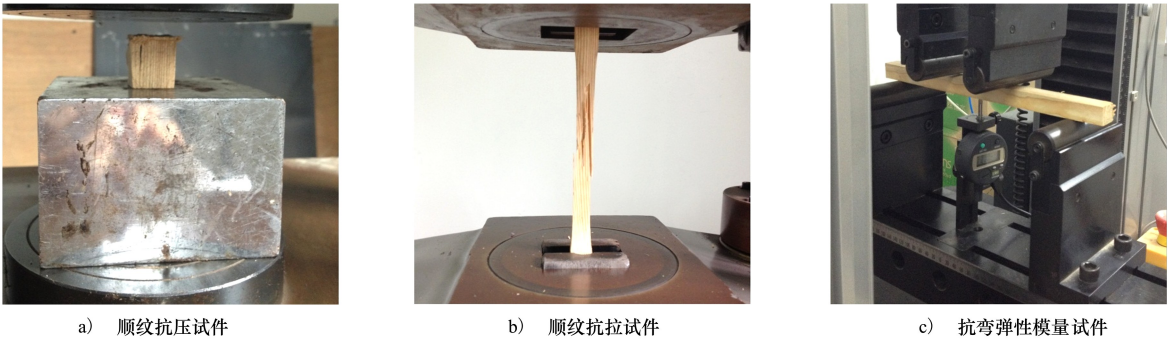


图 4 木材试件加载过程

表 3 木材抗弯弹性模量试验记录及计算结果

试件编号	试件尺寸		E_w/MPa	试件编号	试件尺寸		E_w/MPa
	b/mm	h/mm			b/mm	h/mm	
1	18.6	18.2	12 399	16	20.0	19.9	14 150
2	19.8	19.7	11 541	17	19.7	19.6	14 382
3	19.7	19.6	14 487	18	19.9	18.9	17 530
4	19.2	18.9	12 650	19	20.0	18.7	15 908
5	20.5	20.5	10 517	20	19.0	18.4	14 482
6	19.3	19.2	12 332	21	20.3	20.3	14 785
7	19.5	18.8	14 472	22	20.4	19.9	12 457
8	19.4	18.9	12 216	23	20.0	19.0	19 780
9	19.1	18.7	11 800	24	19.7	19.4	14 164
10	20.0	20.3	11 297	25	20.0	20.3	14 542
11	20.3	19.6	12 466	26	19.9	18.9	13 120
12	20.0	20.0	10 559	27	20.3	20.3	14 660
13	19.0	18.2	12 583	28	20.0	18.5	14 417
14	19.7	19.2	15 639	29	20.3	18.5	12 039
15	19.6	18.8	12 954	30	20.1	18.1	12 848

3.2 基于证据理论的木桁架多目标拓扑优化设计

3.2.1 木桁架基本信息

桁架桥的初始形状为平行弦桁架,如图 5 所示,

荷载仅作用于下弦节点,竖直向下,大小相等,不考虑桁架侧向稳定问题。试验类型为短期静力试验,不考虑长期荷载和动力作用的影响。

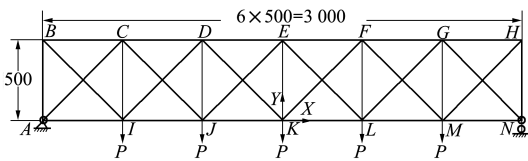


图 5 桁架桥的计算简图(单位: mm)

3.2.2 设计变量

1) 杆件截面变量

依据文献[13],一般构件的长细比应小于 150, 由于上弦杆件承受压力,故以上弦杆件的最大长度计算杆件所需最小截面尺寸。经分析,取上弦杆件的最大长度为 600 mm 较合适,故:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b^3 h}{12bh}} = 0.288b \tag{7}$$
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{600}{0.288b} \leq 150 \Rightarrow b \geq 13.8\text{mm}$$

因此,在后续的尺寸优化设计时,杆件截面厚度均取 14 mm,截面面积选自集合 $S = \{14 \times 14, 14 \times 16, 14 \times 18, 14 \times 20, 14 \times 22, 14 \times 24, 14 \times 26, 14 \times 28, 14 \times 30, 14 \times 32, 14 \times 34, 14 \times 36\} \text{ mm}^2$,共 12 种截面面积。为保持对称性,将杆件分为 12 组,包括上弦杆(所有上弦杆取相同截面,记为 A_1)、下弦杆(所有下弦杆取相同截面,记为 A_2)、两两对称的竖杆(4 组, $A_3(A_{AB} = A_{NH}), A_4(A_{CI} = A_{GM}), A_5(A_{DJ} = A_{FL}), A_6(A_{EK})$) 以及斜腹杆(6 组, $A_7(A_{AC} = A_{GN}), A_8(A_{BI} = A_{HM}), A_9(A_{DI} = A_{FM}), A_{10}(A_{CJ} = A_{GL}), A_{11}(A_{EJ} = A_{EL}), A_{12}(A_{DK} = A_{FK})$)。

2) 形状变量和拓扑变量

由文献[14]可知,平行弦、多边形以及弧形木桁架高跨比(h/l) 最小限值为 $1/6$ 。故桁架跨中高度最小值为: $h = l/6 = 3\,000/6 = 500 \text{ mm}$ 。正因如此,在后续形状优化中,设置上弦节点 E 的 y 坐标在 $500 \sim 800 \text{ mm}$ 内变化,其余上弦节点 y 坐标在 $200 \sim 800 \text{ mm}$ 内变化。为使结构保持对称性,形状变量缩减为: $y_1(y_E), y_2(y_D = y_F), y_3(y_C = y_G), y_4(y_B = y_H)$ 。

由于荷载作用在下弦节点上,故下弦杆和下弦节点保留,其余杆件和节点的增删视为拓扑变量,即,上弦杆: $T_1(T_{BC} = A_{GH}), T_2(T_{CD} = A_{FG}), T_3(T_{DE} = T_{EF})$; 下弦杆: 保留; 竖杆: $T_4(T_{AB} = T_{HN}), T_5(T_{CI} = T_{GM}), T_6(T_{DJ} = T_{FL}), T_7(T_{EK})$; 斜腹杆: $T_8(T_{AC} = T_{GN}), T_9(T_{BI} = T_{HM}), T_{10}(T_{DI} = T_{FM}), T_{11}(T_{CJ} = T_{GL}), T_{12}(T_{EJ} = T_{EL}), T_{13}(T_{DK} = T_{FK})$ 。

3.2.3 优化目标

本文以最小化木桁架总重和结构失效似然度 2 个相互冲突的问题作为优化目标,桁架总重由设计变量和木材密度($\rho = 0.57 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$) 确定,较为简单。此处,重点阐述结构失效似然度的计算。

1) 不确定信息

在该试验中,主要考虑木材弹性模量 E 和节点荷载 P 的不确定性。在木材材性试验时,抗弯弹性模量试件个数为 30 个,具体测量数值见表 3,据此绘制统计图见图 6。由图 6 可见,木材弹性模量具有较大的离散性,由有限的 30 个数据无法建立其精确的概率分布。针对这种具有一定数量累计但又不足以确定其概率分布的情况,木材弹性模量的证据理论描述更为理想。根据图 6 中各样条之间的关系,采用小样本数据信息量化方法^[15],获得弹性模量的区间集合及分配到各区间上的信任度,见图 7。

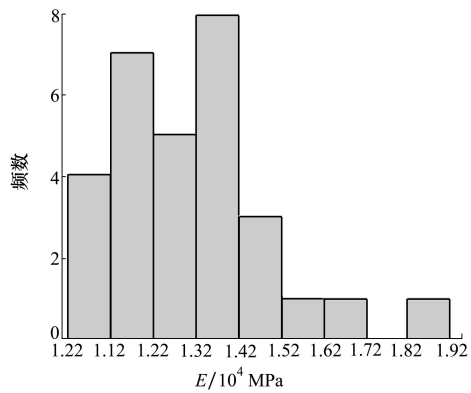


图 6 木材弹性模量的统计直方图

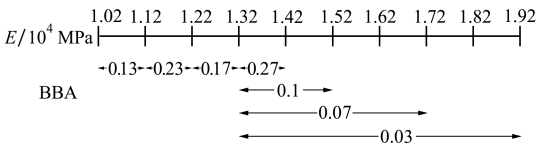


图 7 木材弹性模量的区间集合表达

另外,由于下弦节点处的荷载大小相同,假定其不确定变化保持一致,如图 8 所示。为了在试验过程中模拟这种不确定性,随机选择桁架试件按照表 4 所示的荷载设计值进行加载。

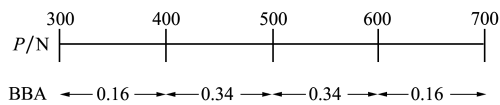


图 8 荷载的区间集合表达

表 4 桁架试件加载值

桁架试件编号	荷载区间	个数	加载值/ N
1	[300 , 400]	0.16×6=0.96 (取 1 个)	370
2	[400 , 500]	0.34×6=2.04 (取 2 个)	420
3			420
4			570
5	[500 , 600]	0.34×6=2.04 (取 2 个)	570
6	[600 , 700]	0.16×6=0.96 (取 1 个)	660

2) 失效似然度

(1) 应力失效似然度:当杆件受压时,按照文献[13]考虑受压杆件的稳定系数 φ ,应该满足 $\sigma_c < \varphi f_c$ 。为了便于计算,在优化设计中假定稳定系数为0.70。压应力失效似然度表示为 $P_{Pl}(\sigma_c(E,P) - \varphi f_c > 0)$;当杆件受拉时,应满足 $\sigma_t < f_t$,拉应力失效似然度表示为 $P_{Pl}(\sigma_t(E,P) - f_t > 0)$ 。

(2) 位移失效似然度:桁架节点位移最大值 u_{max} 不应超过7 mm,位移失效似然度为 $P_{Pl}(u_{max}(E,P) - 7 > 0)$ 。

(3) 第二个优化目标:最小化 $\max\{P_{Pl}(\sigma_c(E,P) - \varphi f_c > 0), P_{Pl}(\sigma_t(E,P) - f_t > 0), P_{Pl}(u_{max}(E,P) - 7 > 0)\}$ 。

3.2.4 不确定优化结果

针对上述桁架结构的基本信息、设计变量以及优化目标,可靠性多目标拓扑优化设计模型如(8)式所示。

find $\boldsymbol{d} = [A_1, A_2, \cdots, A_{12}, y_1, y_2, \cdots, y_4, T_1, T_2, \cdots, T_{13}]$

min $F(\boldsymbol{d})$

min $P_{Pl_{max}} = \max\{P_{Pl}(\sigma_c(E,P) - \varphi f_c > 0),$

$P_{Pl}(\sigma_t(E,P) - f_t > 0),$

$P_{Pl}(u_{max}(E,P) - 7 > 0)\}$ (8)

在求解多目标优化问题(8)时,DEMO 优化参数设置为: $N_p = 200, I_{max} = 500$,随着优化迭代代数的增大,最优解集从混乱无序的支配解逐渐向问题的非支配解集收敛,目标向量也向着最小化的方向逼近,最终得到 Pareto 最优前沿,如图 9 所示。本文选取图 9 最优折衷解集中的 A 点(1.41 kg,0.16)来验证所提理论方法的有效性。由于杆件压应力约束较为严格、节点位移同时受到荷载和弹性模量不确定的影响,在优化过程中压应力和位移失效似然度起控制作用,拉应力失效似然度不起控制作用。本文所选的最优解 A 点,其失效似然度最大值为压应力

失效似然度,即 $P_{Pl_{max}} = P_{Pl}(\sigma_c(E,P) - \varphi f_c > 0) = 0.16$ 。将 A 点所对应的桁架组命名为 HJA,其具体的截面尺寸信息如表 5 所示,形状和拓扑优化结果如图 10 所示。

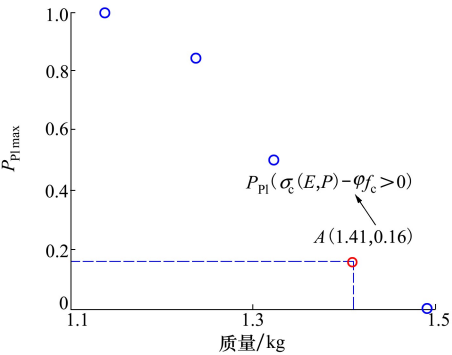


图 9 最优 Pareto 前沿

表 5 试验桁架 HJA 的截面面积

杆件名称	截面面积/(mm×mm)
下弦杆	U_1, U_6 U_2, U_5 U_3, U_4 14×14
上弦杆	O_1, O_6 O_2, O_5 O_3, O_4 14×20
斜杆	D_1, D_4 D_2, D_3 V_1, V_5 14×14
竖杆	V_2, V_4 V_3 14×14

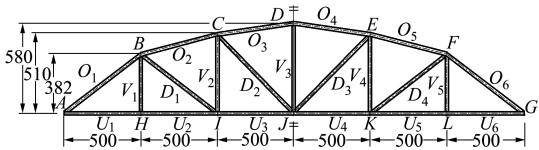


图 10 桁架 HJA 的最优形状和拓扑布局

3.3 木桁架试验方案及加载结果分析

根据 Pareto A 点的截面尺寸、形状以及拓扑优化结果制作 6 榀相同的桁架试件,分别命名为 HJA-1、HJA-2、HJA-3、HJA-4、HJA-5、HJA-6,试验加载如图 11 所示。为了验证基于证据理论的可靠性优化设计的有效性,现将各试件在其设计荷载作用下的最大响应值以及失效情况汇总于表 6。



图 11 HJA 组木桁架的加载过程

表 6 6 榀试件的最大响应值及失效情况

项目	设计荷载/	拉应力/	压应力/	挠度/	失效情况
	N	MPa	MPa	mm	
HJA1	370	7.9	6.5	4.1	未失效
HJA2	420	9.6	8.1	4.8	未失效
HJA3	420	7.9	9.9	5.0	未失效
HJA4	570	8.0	10.1	6.2	未失效
HJA5	570	14.8	10.5	6.8	未失效
HJA6	660	14.1	11.7	7.8	失效

由表 6 可知, HJA-1 至 HJA-4 的响应最大值均小于强度和位移约束条件, 未发生失效。HJA-5 的最大压应力为 10.5 MPa, 该值非常接近临界值 $\varphi f_c = 10.3$ MPa, 两者相差仅 2%, 属于实际工程中可以接受的范围, 而且 HJA-5 具有一定的初始损伤, 如图 12 所示, 并非正常受力所导致的应力增大, 故可近似认为 HJA-5 未发生失效。因此, HJA 组桁架的失效概率为 $P_f = 1/6 = 0.16$, 与 Pareto 前沿中 A 点的失效概率相一致。



图 12 HJA-5 下弦杆 U_5 的初始裂缝和木节

经对比分析, 6 榀桁架结构的响应值均具有一定的离散性。由于篇幅限制, 本节仅选取 HJA-4 和 HJA-5 的部分响应实测值进行说明, 如图 13~14 所示。由于 HJA-4 和 HJA-5 的加载等级和设计荷载

是相同的, 理论上, 两者的应变和挠度在各个阶段是相同的。但通过实测数据的对比分析发现, 两榀桁架在每一加载等级处的响应值以及整个曲线趋势上都表现出一定程度的离散性, 尤其是受压上弦杆的应变、受拉下弦杆的应变和节点 J 的挠度, 具有极大的差异。这些差异主要是由一些不可避免的不确定扰动因素所导致的, 比如节点连接、加载形式(非节点位置加载以及不同步加载等)、木材缺陷、弹性模量以及制造工艺等, 这些不确定因素使相同桁架的受力性能存在极大的变异性。由此可见, 在优化设计中考虑不确定的影响是极其必要的。

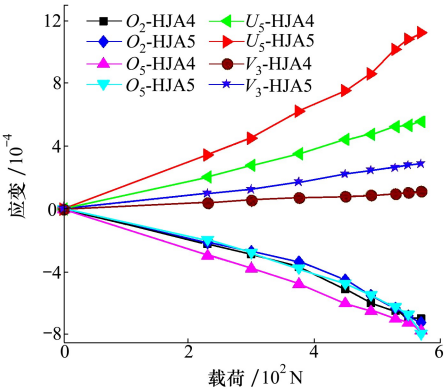


图 13 HJA-4 和 HJA-5 部分杆件应变实测值的比较

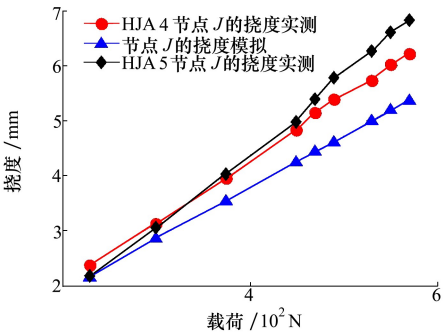


图 14 HJA-4 和 HJA-5 节点 J 挠度实测值的比较

本文在多目标拓扑优化设计中, 采用证据理论考虑了认知不确定因素, 通过增大截面尺寸和改变拓扑构形使得结构在最优的前提下具有更大的安全储备。从 HJA-1 至 HJA-5 的试验结果可以看出, 由于具有较高的安全储备, 即使试件响应实测值具有较大的离散性, 并且大于理论模拟值, 但并未发生失效, 可见该方法能够抵御外在不确定对结构性能的扰动, 避免最优设计提前破坏, 使结构具有良好的稳健性。

4 结 论

针对实际工程中人们对经济性和安全性两方面最优化的期望,本文遵循 Pareto 最优折衷解的概念,采用证据理论表达了认知不确定性,提出了基于证据理论的多目标可靠性优化设计模型,采用无需梯度信息且具有出色非支配策略的多目标并行化微分演化算法求解 Pareto 最优前沿。为了验证本文所提方法的有效性,将木材弹性模量和节点荷载作为不确定变量,对一初始木桁架进行了以最小化桁架质

量和失效概率为目标的不确定优化设计,从中选取一个最优化结果,并据此制作了6榀相同结构形式的桁架试件。6榀木桁架的静力加载试验反映了结构承载能力的离散性以及应用证据理论的必要性,并通过应力和位移限值验证了基于证据理论的不确定优化方法的有效性。通过试验结果发现,基于证据理论的多目标可靠性优化设计是通过增加结构安全储备来抵抗信息不完备情况下不确定变量对结构性能产生的扰动,避免了概率参数偏差造成错误的优化结果,这是一种稳健性优化设计思想。

参考文献:

- [1] WEI F, ZHANG L, YANG S, et al. A multiobjective evolutionary algorithm based on coordinate transformation[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2018, 49:2732
- [2] 刘国强,陈维义,陈华东,等.混沌量子粒子群算法舰炮反后座装置的多目标优化[J].哈尔滨工程大学学报,2020,41(5):655-660
LIU Guoqiang, CHEN Weiyl, CHEN Huadong, et al. Multi-objective optimization of artillery recoil mechanism based on the chaotic quantum particle swarm optimization algorithm[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2020, 41(5): 655-660 (in Chinese)
- [3] 张运涛,李以农,张志达,等.基于改进粒子群算法的非对称传动主轴多目标优化[J].振动与冲击,2022,41(2):130-139
ZHANG Yuntao, LI Yinong, ZHANG Zhida, et al. Multi objective optimization of an asymmetric transmission spindle based on improved particle swarm optimization[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(2):130-139 (in Chinese)
- [4] 苏瑜,唐和生,薛松涛,等.基于证据理论的结构非概率可靠性拓扑优化设计[J].中国科学:技术科学,2019,49(3):320-330
SU Yu, TANG Hesheng, XUE Songtao, et al. Approach of non-probabilistic reliability topology optimization using evidence theory[J]. Scientia Sinica Technologica, 2019, 49(3): 320-330 (in Chinese)
- [5] ZHANG Z, JIANG C, RUAN X X, et al. A novel evidence theory model dealing with correlated variables and the corresponding structural reliability analysis method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57: 1749-1764
- [6] 王巨.基于证据理论的可靠性设计优化方法及其在汽车轻量化中的应用[D].长沙:湖南大学,2019
WANG Ju. Evidence-based reliability design optimization and its application in automobile lightweight[D]. Changsha: Hunan University, 2019 (in Chinese)
- [7] 刘鑫,龚敏,周振华,等.基于证据理论的机械结构高效可靠性分析方法[J].中国机械工程,2020,31(17):2031-2037
LIU Xin, GONG Min, ZHOU Zhenhua, et al. An efficient mechanical structure reliability analysis method based on evidence theory[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(17): 2031-2037 (in Chinese)
- [8] HUANG Z L, JIANG C, ZHANG Z, et al. A decoupling approach for evidence-theory-based reliability design optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 56(1): 647-661
- [9] LI D W, TANG H S, XUE S T, et al. Adaptive sub-interval perturbation-based computational strategy for epistemic uncertainty in structural dynamics with evidence theory[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2018, 53: 75-86
- [10] 于俊涛,邓卫,王巨,等.基于近似移动矢量的证据理论可靠性设计优化方法[J].湖南大学学报,2021,48(8):59-67
YU Juntao, DENG Wei, WANG Ju, et al. An Evidence-theory-based reliability design optimization method using approximate shifting vector[J]. Journal of Hunan University, 2021, 48(8): 59-67 (in Chinese)
- [11] ROBIC T, FILIPIC B. DEMO: differential evolution for multiobjective optimization[J]. Evolutionary Multi-Criterion Optimiza-

tion, 2005, 3410: 520-533

[12] SRIVASTAVA R K, DEB K, TULSHYAN R. An evolutionary algorithm based approach to design optimization using evidence theory[J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(8): 1-12

[13] 中华人民共和国建设部. 木结构设计规范[S]. GB50005-2003, 2003

[14] 木结构设计手册编辑委员会. 木结构手册[M]. 3 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005

Wood structure design manual editorial committee. Wood structure manual[M]. 3rd edition. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005 (in Chinese)

[15] SALEHGHAFARI S, RAIS-ROHANI M, MARIN E B, et al. Optimization of structures under material parameter uncertainty using evidence theory[J]. Engineering Optimization, 2013, 45 (9): 1027-1041

Multi-objective topology optimization design of truss structures
based on evidence theory under limited information

SU Yu¹, TANG Hesheng²

(1.School of Civil Engineering, Architecture and Environment, Hubei University of Technology, Wuhan 430068 ,China;)
(2.College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Uncertainty information is often limited and has great discreteness, how to ensure the structure having good robustness under epistemic uncertainty becomes a technical problem for multi-objective topology optimization design. In this paper, the evidence theory is used to quantify the epistemic uncertainty; the plausibility measurement expressing upper limit of failure probability is applied to be a new evaluation of reliability. The total weight and the reliability of structures are taken as the optimization objectives, and a multi-objective robust topology optimization design model based on evidence theory is proposed. Parallelization technique based differential evolution for multi-objective optimization (DEMO) is preferable to search above robust Pareto front due to its merits of non-requirement of any gradient and superior mechanisms of non-dominate strategy. In order to verify the effectiveness of the proposed method, the multi-objective reliability optimization of a wood truss structure is implemented with considering elastic modulus and structural load as uncertain variables. According to the optimization results, six same truss specimens are made for the static random loading test. The failure probability of the truss structure is judged by the stress and node displacement obtained from the test, so as to verify the feasibility of the reliability optimization method based on evidence theory. The experimental results also indicate that the proposed method can avoid the deviation of the optimization results caused by the fluctuation of epistemic uncertainty, and provide a new method for designers to make the optimization results robust even when the data information is insufficient and the cognitive level is limited.

Keywords: epistemic uncertainty; evidence theory; uncertainty quantification; multi-objective optimization design; parallel computation

引用格式: 苏瑜, 唐和生. 有限信息下基于证据理论的桁架结构多目标拓扑优化设计[J]. 西北工业大学学报, 2023, 41(4): 722-731

SU Yu, TANG Hesheng. Multi-objective topology optimization design of truss structures based on evidence theory under limited information[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2023, 41(4): 722-731 (in Chinese)