

基于椭球理论的卫星入轨位置随机误差估计方法

吴焕芹¹, 王茂才^{1,2}, 宋志明^{1,2}, 陈晓宇^{1,2}

(1.中国地质大学(武汉) 计算机学院, 湖北 武汉 430074;
2.中国地质大学(武汉) 智能地学信息处理湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘 要:准确快捷地估计卫星位置随机误差有利于更好地控制卫星。针对卫星入轨位置的随机误差, 分析了入轨位置随机误差的概率密度函数, 根据卫星入轨六根数不确定性矩阵, 利用协方差阵传播率确定地心惯性坐标系下入轨位置在 3 个坐标轴方向的不确定性, 把入轨位置等概率密度曲面近似为椭球, 推导出椭球的形状、大小和方向, 进而计算卫星入轨在一定空间范围内的概率。利用蒙特卡罗方法, 借助 STK 软件模拟低轨微纳卫星在随机因素影响下发射入轨, 仿真实际入轨位置分布, 并对比椭球理论模型下入轨位置的概率分布。仿真结果表明椭球理论误差模型分析结果与模拟实验结果基本一致, 说明该椭球理论模型可以用来估计卫星随机位置误差。

关 键 词:卫星轨道; 初始位置; 随机误差; 误差椭球; 概率密度曲面

中图分类号:V217+.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-2758(2023)04-0802-10

卫星入轨位置精准度受多种因素的影响, 不可避免地存在系统误差和随机误差。系统误差可以在设计或实际操作过程中予以考虑并削减, 而随机误差是由偶然因素引起的, 难以预测和控制。随机误差亦会导致卫星入轨空间位置的不确定, 并在卫星组网和运行过程中传播, 对工作效能产生影响。工程实际中对于高价值的重要航天器, 一般是通过发动机点火等方式对轨道进行校正和调整, 但对于小卫星和微纳卫星, 由于其体积小携带有限, 进行自身轨道修正的代价较高或远超其设计发射成本, 况且大规模星群也没法进行广泛的轨道修正。但不同用途的卫星对位姿精度要求不同, 如果能准确快速地估计其位置偏差, 可以让工作者做出正确的决策。

当前已经有很多学者对卫星定位精度及运行误差进行了相关研究, 并取得了一定成果。如针对卫星的定位精度, Knogl 等^[1]利用 LEO 卫星通信信道对 GEO 卫星进行精确定位。Vighnesam 等^[2]研究了通过位置差确定 IRS 运行轨道的系统方法。Zhou 等^[3]针对北斗卫星定轨提出了一种基于反单点定位的近实时无推力建模方法。Li 等^[4]实现了利用卫星激光测距分析北斗 3 号卫星的轨道精度。Larki 等^[5]研究了基于梯度法确定卫星轨道的方法。白显宗^[6]基于历史轨道数据研究了空间目标轨道预报误差与碰撞概率问题。贺若飞等^[7]提出一种基于蒙特卡罗卡尔曼滤波的目标定位算法, 并应用于无人机目标定位中, 取得较好效果。阎海峰等^[8]针对伪卫星空中基站位置不易精确确定的问题, 建立了组合导航系统和非线性数学模型, 提出了一种抗差自适应高斯混合 Sigma 点粒子滤波算法。文献[9]基于多项式区间参数分析法, 针对探测器着陆过程动态特性, 提出基于非线性有限元建模的探测器着陆区间分析流程, 计算得到探测器着陆动响应上界和下界。文献[10]对分布式 InSAR 目标三维定位的空间几何关系, 给出了定位精度指标与系统参数精度指标之间关系的解析表达式。文献[11]针对三星编队系统, 将卫星位置误差源分为体现误差相关性的整体绝对位置误差和体现误差非相关性的星间相对位置误差, 从而对存在相关性误差的卫

收稿日期:2022-09-16 基金项目:国家自然科学基金面上项目(42271391)、国家自然科学基金青年项目(62006214)与湖北省重点研发专项(2023BIB015)资助

作者简介:吴焕芹(1981—), 中国地质大学(武汉)博士研究生, 主要从事星群效能评估研究。

通信作者:王茂才(1974—), 中国地质大学(武汉)教授, 主要从事航天智能优化研究。e-mail: cugwangmc@126.com

星编队系统进行定位精度分析。在运行误差分析中,文献[12]对影响遥感卫星覆盖的不确定性因素进行归一化量化,对具有不确定性因素影响的指标进行求解,得到具有统计特性的指标结果。文献[13]提出一种线性回归近似替代不确定性,将不确定性参数对于效能影响降维为一个线性组合系数进行求解。文献[14]给出了降维表示方法中功率谱密度函数的解析随机误差,并通过数值算例加以证明。文献[15]提出了一种用神经网络替代不确定性的分析方法,通过人工神经网络在拟合回归分析上的非线性特性,研究分布式卫星系统概念设计中的不确定性参数。文献[16]引入模拟误差场对不确定进行描述,从而获得比较精确的估计数值。

综上所述,目前针对卫星轨道位置精度或误差描述主要有解析法、数值法或通过第三方测量获得;研究对象主要是中、高轨单个高价值卫星或低轨少量卫星系统。相关研究中的解析法是将某时刻卫星位置用轨道根数的解析函数表示,为便于建模学者一般采用简化模型或对不确定性因素做近似处理。该方法在卫星数量不多的情况下适用性较好,但影响计算精度,也不适用于大规模星群。数值法在抽样数量足够多的前提下,可实现对样本的无偏估计,但在卫星规模较大情况下,又存在计算效率低、耗时长等缺点。通过第三方介入测量,又存在过程复杂、成本高等问题。显然上述方法不能满足近几年大量卫星发射入轨,对位置误差多、精、快的评估要求。

本文结合解析法和数值法,采用概率论的知识和误差椭球理论进行研究。首先针对卫星发射入轨位置随机误差,依据卫星入轨六根数不确定性矩阵,利用协方差阵传播率确定地心惯性坐标系下卫星入轨位置在 3 个坐标轴方向的位置不确定性,构建了描述卫星入轨位置随机误差的一种椭球理论,给出卫星入轨在一定空间范围内的概率计算公式。然后利用 STK 软件和蒙特卡罗方法,模拟随机因素影响下低轨微纳卫星入轨位置,验证误差理论模型与实际工况的一致性。实验结果表明本文构建的误差椭球理论可以很好地用于估计入轨位置随机误差,尤其是估计大规模星群位置误差,本文方法具有高效性,很好地克服了已有方法的局限性。

1 卫星发射入轨位置表达式

卫星发射入轨位置通常用轨道六根数表示。在

航天工程中,卫星六根数期望值根据效能要求精准确定,而卫星实际入轨位置的离散程度通常可通过六根数的不确定性矩阵表示。

1.1 入轨位置不确定性矩阵

假设卫星入轨位置六根数用向量 $\mathbf{X}$ 表示,即:

$$\mathbf{X} = [X_a \ X_e \ X_i \ X_E \ X_\omega \ X_f]^T$$

向量 $\mathbf{X}$ 中 $X_a, X_e, X_i, X_E, X_\omega, X_f$ 分别表示卫星轨道的半长轴、偏心率、轨道倾角、升交点赤经、近地点幅角和卫星入轨位置的真近点角。

在卫星发射过程中考虑随机因素的影响,其入轨位置为随机变量。设其轨道参数向量 $\mathbf{X}$ 的数学期望为

$$\boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} E(X_a) \\ E(X_e) \\ E(X_i) \\ E(X_\Omega) \\ E(X_\omega) \\ E(X_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{e} \\ \bar{i} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{\omega} \\ \bar{f} \end{bmatrix} \quad (1)$$

卫星轨道位置六根数向量 $\mathbf{X}$ 的方差用 $\mathbf{D}_{XX}$ 表示,即

$$\mathbf{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_a}^2 & \sigma_{X_a X_e} & \sigma_{X_a X_i} & \sigma_{X_a X_\Omega} & \sigma_{X_a X_\omega} & \sigma_{X_a X_f} \\ \sigma_{X_e X_a} & \sigma_{X_e}^2 & \sigma_{X_e X_i} & \sigma_{X_e X_\Omega} & \sigma_{X_e X_\omega} & \sigma_{X_e X_f} \\ \sigma_{X_i X_a} & \sigma_{X_i X_e} & \sigma_{X_i}^2 & \sigma_{X_i X_\Omega} & \sigma_{X_i X_\omega} & \sigma_{X_i X_f} \\ \sigma_{X_\Omega X_a} & \sigma_{X_\Omega X_e} & \sigma_{X_\Omega X_i} & \sigma_{X_\Omega}^2 & \sigma_{X_\Omega X_\omega} & \sigma_{X_\Omega X_f} \\ \sigma_{X_\omega X_a} & \sigma_{X_\omega X_e} & \sigma_{X_\omega X_i} & \sigma_{X_\omega X_\Omega} & \sigma_{X_\omega}^2 & \sigma_{X_\omega X_f} \\ \sigma_{X_f X_a} & \sigma_{X_f X_e} & \sigma_{X_f X_i} & \sigma_{X_f X_\Omega} & \sigma_{X_f X_\omega} & \sigma_{X_f}^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{D}_{XX}$ 的主对角线上的元素为轨道六根数随机变量 $X_a, X_e, X_i, X_E, X_\omega, X_f$ 的方差,非主对角线中的元素是描述 2 个轨道参数之间相关性的协方差。由于在卫星轨道六根数中,各参数相互独立,即协方差为零,故向量 $\mathbf{X}$ 的方差阵可进一步写为

$$\mathbf{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_a}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{X_e}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{X_i}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{X_\Omega}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{X_\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{X_f}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由于卫星入轨位置受许多相互独立的随机因素的影响,且每个因素所产生的影响都很小,由中心极

限定理,可假设入轨位置六根数服从正态分布。

1.2 卫星入轨位置随机误差表示

如果卫星在笛卡尔坐标系中希望入轨位置为 $P(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, 实际入轨位置为 $P'(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (如图1所示), 则实际入轨位置的偏差 $\mathbf{r}$ 可表示为:

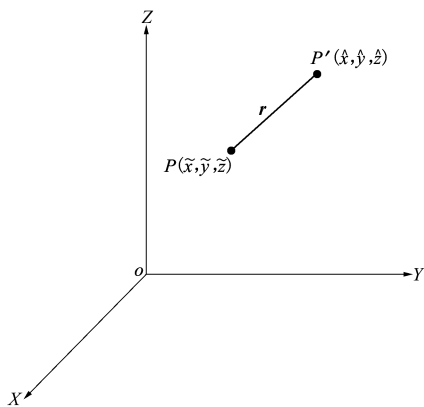


图1 卫星入轨点位置误差示意图

$$\begin{cases} r_x = \hat{x} - \hat{x} \\ r_y = \hat{y} - \hat{y} \\ r_z = \hat{z} - \hat{z} \end{cases} \quad (4)$$

式中, r_x, r_y, r_z 为空间位置误差 $\mathbf{r}$ 在 x, y, z 轴上的分量。显然

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \quad (5)$$

所以

$$E(r^2) = E(r_x^2) + E(r_y^2) + E(r_z^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \quad (6)$$

式中, $E(r^2)$ 是卫星希望入轨位置点 P 误差平方的理论平均值, 并定义为 P 点的点位方差, 记为 σ_p^2 , 则

$$\sigma_p^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \quad (7)$$

式中: σ_p^2 的大小与坐标系的选择无关; σ_p 称为入轨位置误差。

2 卫星入轨位置误差模型构建

卫星入轨位置误差 σ_p 可以用来评定入轨位置精度, 但不能显示在哪个方向上的位差, 在讨论卫星或星群的空间碰撞安全、对地覆盖或其他效能时, 需要考虑卫星所处轨道位置在哪个方向上的偏差, 为此, 需要确定卫星在三维空间内的位置矢量差。卫星入轨位置等概率密度点的集合可形成一闭合曲面, 该曲面能把各个方向上的误差表示出来 (见图2)。但该曲面不是一种典型的曲面, 作图也不方

便, 但其形状与椭球很相似, 为便于分析, 以椭球近似, 称之为等概率密度误差椭球 (见图3), 简称误差椭球。

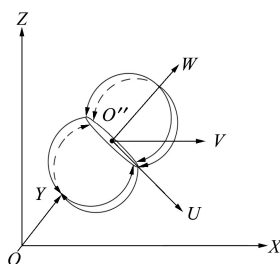


图2 等概率密度点曲面示意图

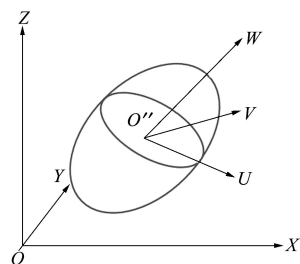


图3 误差椭球示意图

2.1 误差椭球模型函数

在随机误差下, 卫星入轨位置在地心惯性坐标系下呈三维正态分布, 其联合分布密度函数为

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\mathbf{D}_{xx}|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - r_x, y - r_y, z - r_z) \cdot \mathbf{D}_{xx}^{-1} (x - r_x, y - r_y, z - r_z)^T \right\} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{D}_{xx}$ 为地心惯性坐标系下卫星入轨位置的不确定性矩阵; $|\mathbf{D}_{xx}|$ 为不确定性矩阵的行列式。 $\mathbf{D}_{xx}$ 的表达式为

$$\mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $\sigma_i^2 (i = x, y, z)$ 为坐标轴向的方差; $\sigma_{ij} (i, j = x, y, z, i \neq j)$ 为各坐标轴之间的协方差。

2.2 不确定性矩阵 $\mathbf{D}_{xx}$ 的确定

已知轨道六根数的协方差阵 $\mathbf{D}_{XX}$, 根据协方差传播率^[17] 可以计算不确定性矩阵 $\mathbf{D}_{xx}$

$$\mathbf{D}_{xx} = \mathbf{A} \mathbf{D}_{XX} \mathbf{A}^T \quad (10)$$

式中, 矩阵 $\mathbf{A}$ 为一个 3×6 的矩阵, 可用 (11) 式表示。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial e} & \frac{\partial x}{\partial i} & \frac{\partial x}{\partial \Omega} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial f} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial e} & \frac{\partial y}{\partial i} & \frac{\partial y}{\partial \Omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial f} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial e} & \frac{\partial z}{\partial i} & \frac{\partial z}{\partial \Omega} & \frac{\partial z}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial f} \end{bmatrix} \bigg|_{(\hat{a}, \hat{e}, \hat{i}, \hat{\Omega}, \hat{\omega}, \hat{f})} \quad (11)$$

式中: x, y, z 是在地心惯性坐标系下的卫星位置表达

式; $a, e, i, \Omega, \omega, f$ 分别表示卫星轨道六根数; $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{f}$ 是(1) 式所示的轨道六根数的期望值。也就是矩阵 $\mathbf{A}$ 中各元素分别是卫星位置 x, y, z 的表达式对轨道六根数的偏导,并在轨道六根数期望值处的值。

2.3 误差椭球轴长的确定

根据联合分布密度函数(8) 式,该三维正态分布空间内概率密度相同点的表达式为

$$(x - r_x, y - r_y, z - r_z) \mathbf{D}_{xx}^{-1} (x - r_x, y - r_y, z - r_z)^T = k^2 \quad (12)$$

令 $x - r_x = x', y - r_y = y', z - r_z = z'$, 则(12) 式可写为

$$(x', y', z') \mathbf{D}_{xx}^{-1} (x', y', z')^T = k^2 \quad (13)$$

(13) 式是地心惯性坐标系下一个相似椭球族表达式, k 为放大因子,给定一个 k 值,就得到一个椭球。为方便分析,进行坐标转换,求出其在主轴坐标系 $OUVW$ (如图 4 所示) 内的表达式。

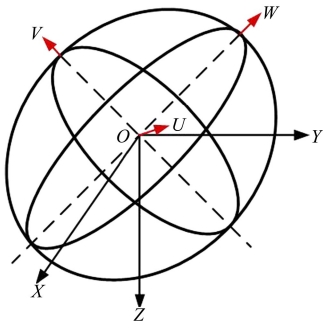


图 4 地心坐标与主轴坐标示意图

图 4 中椭球族的主轴为 OU, OV, OW 。因为 $\mathbf{D}_{xx}$ 为实对称矩阵,则存在正交矩阵 $\mathbf{M}$,使得

$$\mathbf{M}^T \mathbf{D}_{xx} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

对(14) 式两边同时取逆,得到

$$\mathbf{M}^T \mathbf{D}_{xx}^{-1} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

进一步变换形式,得到

$$\left[\mathbf{M}^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \mathbf{M}^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = k^2 \quad (16)$$

令

$$\mathbf{M}^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (17)$$

得到

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = k^2 \quad (18)$$

展开得到

$$\frac{u^2}{\lambda_1} + \frac{v^2}{\lambda_2} + \frac{w^2}{\lambda_3} = k^2 \quad (19)$$

(19) 式为在主轴坐标系下的误差椭球方程,其半轴长平方分别为 $k^2 \lambda_1, k^2 \lambda_2, k^2 \lambda_3$, 这里 k 为前面定义的放大因子, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为协方差阵 $\mathbf{D}_{xx}$ 的特征值。已知协方差阵,给定 k 值,即可确定相应的椭球轴长。

2.4 误差椭球轴向的确定

(14) 式中的正交矩阵 $\mathbf{M} = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 即是从地心惯性坐标系 $OXYZ$ 转换到主轴坐标系 $OUVW$ 的旋转矩阵,由此可以确定椭球 3 个轴分别与 Z 轴的夹角。以轴 OU 为例,如图 5 所示, OU 轴与 OZ 轴的夹角为 $\alpha (0^\circ \leq \alpha < 180^\circ)$, OU 轴在 OXY 平面的投影与 OX 轴的夹角为 $\beta (0^\circ \leq \beta < 360^\circ)$, 由于 $\mathbf{M}$ 为旋转矩阵,则可以直接根据旋转矩阵的元素计算相应角度,并转换到 α, β 规定的范围内,即

$$\alpha = \arccos a_{31} \quad (20)$$

β 可由 a_{21}, a_{31} 通过 Matlab 中双变量反正切函数确定。

同理,可以计算 OV 和 OW 分别与 OZ 轴的夹角,及其在 XOY 平面的投影与 OX 轴的夹角。

卫星入轨位置在地心惯性坐标系下的位置表达式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a(1-e^2)\cos f \cos \Omega \cos \omega - a(1-e^2)\cos f \sin \Omega \sin \omega \cos i}{1+e\cos f} \\ \frac{a(1-e^2)\cos f \sin \Omega \cos \omega + a(1-e^2)\cos f \cos \Omega \sin \omega \cos i}{1+e\cos f} \\ \frac{a(1-e^2)\cos f \sin \omega \sin i + a(1-e^2)\cos f \cos \omega \sin i}{1+e\cos f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-a(1-e^2)\cos f \cos \Omega \sin \omega - a(1-e^2)\cos f \sin \Omega \cos \omega \cos i}{1+e\cos f} \\ \frac{-a(1-e^2)\cos f \sin \Omega \sin \omega + a(1-e^2)\cos f \cos \Omega \cos \omega \cos i}{1+e\cos f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

将轨道参数期望值代入(26)式得到地心惯性坐标系下期望入轨位置

$$\begin{cases} x = 3\,452.1 \\ y = -780.4 \\ z = 5\,928.0 \end{cases} \quad (27)$$

根据(11)式,对(26)式中 x,y,z 表达式分别对轨道六根数求偏导,并计算在近似值(期望值)的结果,得到偏导数矩阵 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.50 & -1\,726.04 & 0 & 780.44 & -5\,979.16 & -5\,979.16 \\ -0.11 & 390.22 & -5\,928.01 & 3\,452.07 & -450.59 & -450.59 \\ 0.86 & -2\,964.00 & -780.44 & 0 & 3\,422.54 & 3\,422.54 \end{bmatrix} \quad (28)$$

根据(10)式得到地心惯性坐标系下的不确定性矩阵

$$\mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} 20.888\,5 & 1.962\,8 & -9.298\,7 \\ 1.962\,8 & 30.197\,2 & 2.243\,2 \\ -9.298\,7 & 2.243\,2 & 10.186\,9 \end{bmatrix} \quad (29)$$

将 $\mathbf{D}_{xx}$ 和 r_x,r_y,r_z 代入(8)式即可得到该卫星入轨位置误差椭球函数。

4.2 误差椭球分析结果

对卫星入轨位置误差椭球函数进行计算,得到正交矩阵 $\mathbf{M}$ 和对应的对角阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0.500\,0 & 0.849\,3 & 0.169\,1 \\ 0.113\,0 & -0.129\,6 & 0.985\,1 \\ -0.858\,6 & -0.511\,7 & 0.031\,2 \end{bmatrix} \quad (30)$$
$$\mathbf{M}^T \mathbf{D}_{xx} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4.476\,7 & & \\ & 26.190\,7 & \\ & & 30.605\,2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

据此确定卫星入轨位置误差矢量。当放大因子 k 取1时计算结果见表1,当 k 取2.8时(95%的概率落在椭球范围内)误差椭球如图7所示。

表 1 椭球分析结果

参数	数值
位置分布椭球中心	(3 452.1, -780.4, 5 928.0)
椭球短轴长/km	2.115 8
椭球中轴长/km	5.117 7
椭球长轴长/km	5.532 2
短轴、中轴、长轴与 Z 轴的夹角/(°)	(30.84, 120.7, 91.79)
短轴投影到 XOY 平面与 X 轴的夹角/(°)	(347.26, 351.32, 260.26)

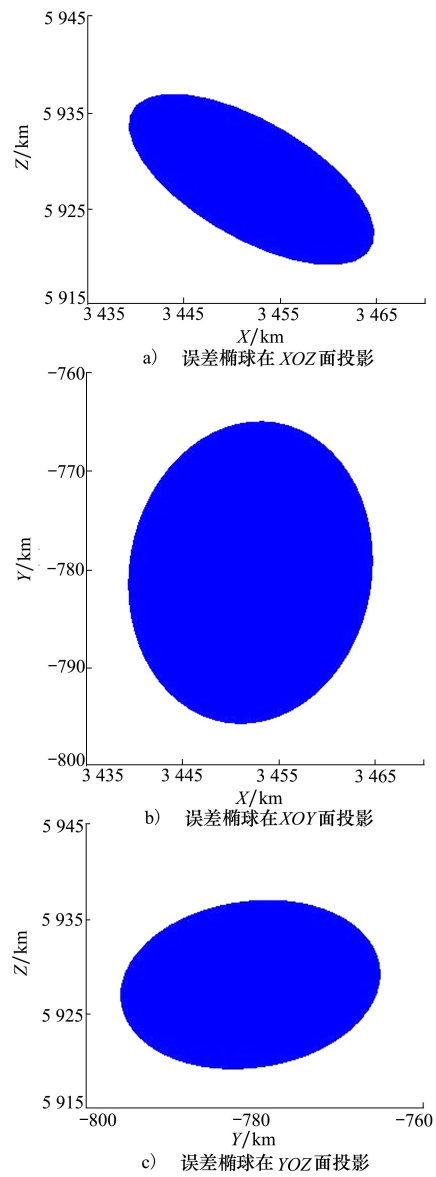


图 7 卫星入轨位置椭球仿真结果

进一步地,利用误差椭球理论分析卫星在不同真近点角处的误差椭球、轴长、轴向分别如图 8~10 所示。

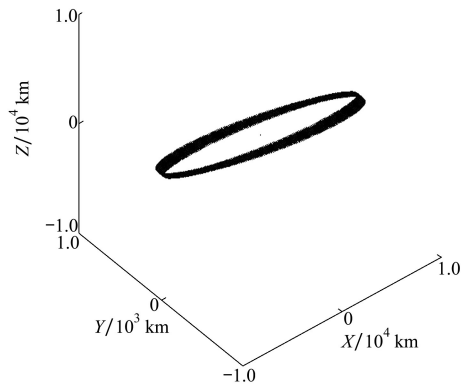


图 8 不同真近点角处误差椭球示意图

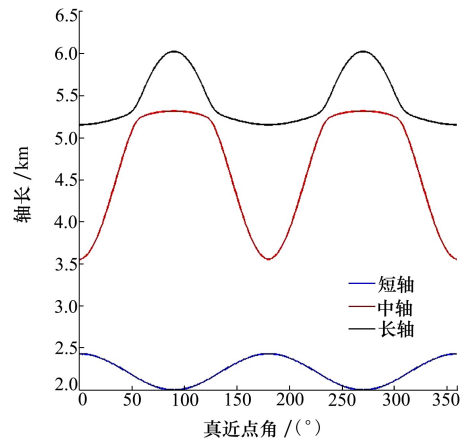


图 9 不同真近点角下误差椭球三根轴长示意图

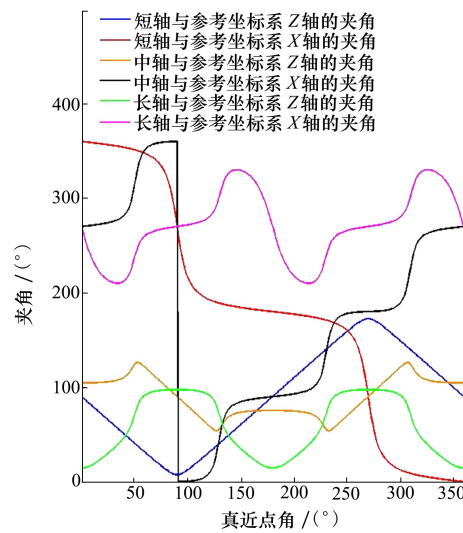


图 10 不同真近点角处误差椭球三根轴轴向示意图

4.3 蒙特卡罗仿真结果

采用同样的轨道六根数协方差阵(15)式,通过 STK 软件模拟该卫星入轨位置仿真 10 000 次,则入轨位置分布如图 11 所示。

对 10 000 次入轨位置求平均值,得到入轨位置 x,y,z 的平均值(3 452.056 888, -780.432 294 9, 5 927.999 303),根据(7)式可得到入轨位置点位方差为 15.191 1 km^2 ,入轨位置中误差为 3.897 6 km,卫星入轨在一定误差范围内的概率用频度表示,其概率密度直方图如图 12 所示。

对蒙特卡罗仿真结果通过主成分分析,得到卫星分布椭球 3 个轴长及轴向,如表 2 所示。

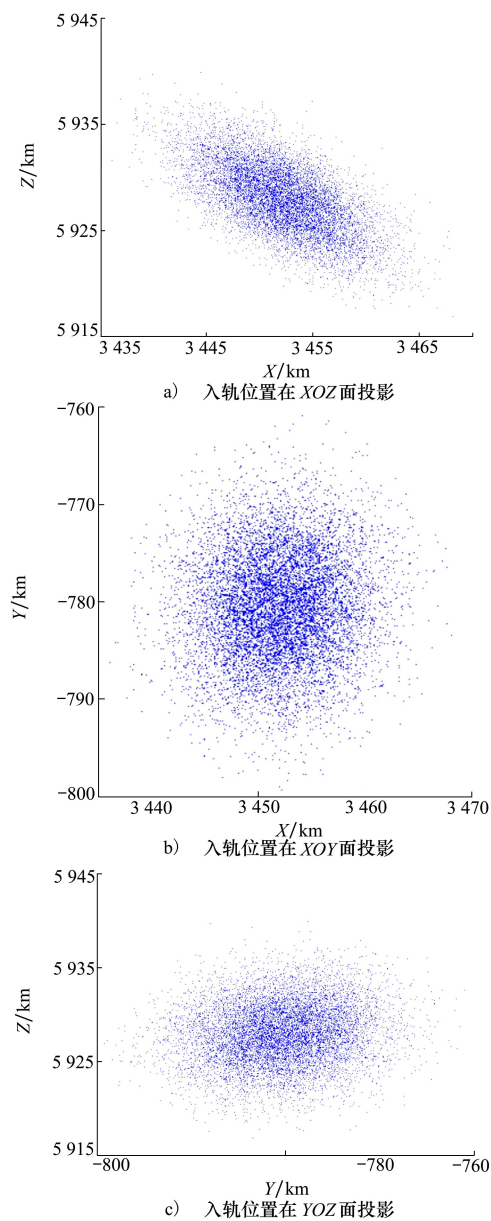


图 11 蒙特卡罗仿真卫星入轨位置

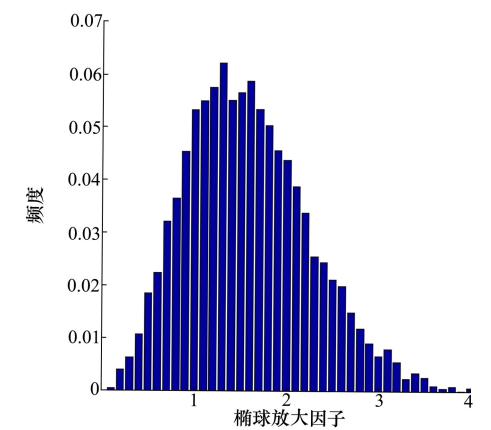


图 12 在一定误差范围内出现的概率直方图

表 2 蒙特卡罗结果主成分分析	
参数	值
位置分布椭球中心	(3 452.1,-780.4,5 928.0)
椭球短轴长/km	2.116 6
椭球中轴长/km	5.091 2
椭球长轴长/km	5.492 3
短轴、中轴、长轴与 Z 轴的夹角/(°)	(30.89,120.59,93.93)
短轴投影到 XOY 平面与 X 轴的夹角/(°)	(347.50,356.43,264.1)

4.4 2 种方法分析结果比较

从表 1 和表 2 的结果可以看出,误差椭球分析和蒙特卡罗仿真结果非常接近。

为进一步验证误差椭球理论的合理性,在此采用提出的椭球模型计算卫星落入的概率,并与蒙特卡罗实验仿真方法比较,在特定 k 值时,2 种分析方法呈现的概率结果如表 3 所示。

表 3 卫星落在一定误差范围内的概率		
k	误差椭球模型结果/%	蒙特卡罗仿真结果/%
1	19.87	22.64
1.5	47.78	50.95
2	73.85	76.25
2.5	89.99	90.98
2.8	95.06	95.86

在放大因子 k 从 0~4 整个区间,误差椭球理论估算的卫星入轨位置概率和模拟仿真的结果比较,如图 13 所示。

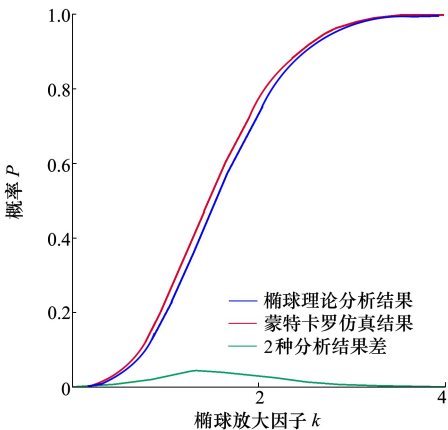


图 13 2 种方法分析卫星入轨误差概率曲线比较图

从图中可以看出,2 个结果非常接近,且误差椭球计算概率略低于蒙特卡罗仿真结果,说明该误差椭球理论模型可以可靠地估计卫星在随机误差下的

入轨位置。

5 结 论

本文构建了描述卫星入轨位置随机误差的一种椭球理论模型并验证了其合理性。根据随机误差下入轨位置六根数的不确定性矩阵,把入轨位置随机误差等概率密度曲面近似为椭球,确定椭球三根轴的长度及轴向,并给出卫星入轨在一定误差范围内概率的计算方法。利用蒙特卡罗方法,借助 STK 软件模拟了一颗低轨微纳卫星在随机因素影响下发射

入轨的实验,得到实验卫星入轨位置实际分布,并与误差椭球模型下入轨位置的概率分布对比,结果表明椭球模型分析结果与仿真结果一致,从而说明误差椭球理论可以用于估计入轨位置随机误差,尤其是高效估计大规模星群位置误差,对大规模星群设计及发射具有较好参考价值。

精确地估计卫星入轨位置随机误差,对于计算卫星运行中的碰撞安全、卫星对地覆盖效果等都有很重要的意义,后期可以结合入轨位置误差椭球理论及误差传递特性进一步研究任意时刻卫星运行轨道的误差及对效能的影响。

参考文献:

- [1] KNOGL J S, HENKEL P, GUNTHER C. Precise positioning of a geostationary data relay using LEO satellites [C] // 53rd International Symposium Elmar, 2011: 325-328
- [2] VIGHNESAM NV, SONNEY A, SONI P K. CARTOSAT-1 orbit determination system and achieved accuracy during early phase [C] // 2007 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 2007: 511-522
- [3] ZHOU P, DU L, LI X, et al. Near real-time BDS GEO satellite orbit determination and maneuver analysis with reversed point positioning[J]. Advances in Space Research, 2018, 63(5): 1781-1791
- [4] DING Li, XUE Cheng, JIA Xiaolin, et al. Precision analysis of BDS-3 satellite orbit by using slr data [C] // China Satellite Navigation Conference 2019 Proceedings, 2019: 389-399
- [5] LARKI M H A, MABOODI M, BOLANDI H. Satellite orbit determination based on gradient method [C] // Chinese Control and Decision Conference, 2012: 2554-2559
- [6] 白显宗. 空间目标轨道预报误差与碰撞概率问题研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2013
BAI Xianzhong. Research on orbital prediction error and collision probability of space objects [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2013 (in Chinese)
- [7] 贺若飞, 田雪涛, 刘宏娟, 等. 基于蒙特卡罗卡尔曼滤波的无人机目标定位方法[J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(3): 435-441
HE Ruofei, TIAN Xuetao, LIU Hongjuan, et al. A UAV target localization approach based on Monte-Carlo Kalman filter [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(3): 435-441 (in Chinese)
- [8] 阎海峰, 魏文辉, 冯志华, 等. 伪卫星空中基站定位高性能算法研究[J]. 西北工业大学学报, 2015, 33(5): 763-769
YAN Haifeng, WEI Wenhui, FENG Zhihua, et al. Research on high-performance algorithm for pseudolite air based positioning [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2015, 33(5): 763-769 (in Chinese)
- [9] CHEN Zhaoyue, LIU Li, CHEN Shulin, et al. Interval uncertainty analysis of soft-landing dynamics of lunar lander [J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(2): 442-448
- [10] 谷德峰, 易东云, 朱炬波, 等. 分布式 InSAR 三维定位的闭合形式解及其精度分析[J]. 电子学报, 2007(6): 1026-1031
GU Defeng, YI Dongyun, ZHU Jubo, et al. Closed-form solution of distributed InSAR geolocation and its precision analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2007(6): 1026-1031 (in Chinese)
- [11] 郑晋军, 曹志刚. 卫星位置误差相关时的三星编队系统时差定位精度[J]. 清华大学学报, 2004(10): 1398-1401
ZHENG Jinjun, CAO Zhigang. Positioning precision of three satellite constellation using relative locations in the presence of correlated satellite positioning errors [J]. Journal of Tsinghua University, 2004(10): 1398-1401
- [12] 易山. 基于不确定性的遥感卫星系统效能评估[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021
YI Shan. Effectiveness evaluation of remote sensing satellite system based on uncertainty [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021 (in Chinese)

[13] 高辰, 杨震, 牛文龙. 基于线性回归近似替代模型的分布式卫星系统不确定性分析方法[J]. 空间科学学报, 2021, 41(6): 928-935
GAO Chen, YANG Zhen, NIU Wenlong. Linear surrogate uncertainty analysis method for distributed satellite system[J]. Chinese Journal of Space Science, 2021, 41(6): 928-935 (in Chinese)

[14] ZHANG Houle, WU Yongxin, WANG Juncheng. Analysis of stochastic errors and gaussianity of random vector process simulated by dimension-reduction representation method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2022, 109: 283-303

[15] 杨辰. 分布式卫星系统概念设计中的不确定性参数分析方法研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2020
YANG Chen. Research on performance uncertainty analysis methods for distributed satellite system in conceptual design phase [D]. Beijing: China University of Science, 2020 (in Chinese)

[16] MAGGIONI V, SAPIANO M R P, ADLER R F. Estimating uncertainties in high-resolution satellite precipitation products: systematic or random error[J]. Journal of Hydrometeorology, 2016, 17(4): 1119-1129

[17] 王穗辉. 误差理论与测量平差[M]. 上海: 同济大学出版社, 2015
WANG Suihui. Error theory and basis of surveying adjustment[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2015 (in Chinese)

[18] 唐宁, 王少萍, 洪迪峰. 井眼测量误差椭球最小间距计算方法[J]. 石油学报, 2017, 38(11): 1320-1325
TANG Ning, WANF Shaoping, HONG Difeng. A calculation method of minimum distance between wellbore survey error ellipsoid [J]. Acta Petrolei Sinica, 2017, 38(11): 1320-1325 (in Chinese)

A random error estimation method for satellites being launched into orbit based on ellipsoid theory

WU Huanqin¹, WANG Maocai^{1,2}, SONG Zhiming^{1,2}, CHEN Xiaoyu^{1,2}

(1.School of Computer Science, China University of Geosciences(Wuhan), Wuhan 430074, China;
2.Hubei Key Laboratory of Intelligent Geo-Information Processing, China University of Geosciences(Wuhan), Wuhan 430074, China)

Abstract: Accurate and fast random error estimation is essential to improve satellite control. In this paper, the random error of the satellite being launched into orbit is explored. According to the uncertainty matrix of six satellite orbit parameters associated with the project, the uncertainty of the orbit position in the three axes of the geocentric inertial frame of reference is calculated via the propagation rate of the covariance matrix. Then, the random error probability density of the satellite position is constructed for normal distribution. The surface of the error with the same probability density is approximated as an ellipsoid, the size is deduced along with the ellipsoid's shape and direction, and the satellite's spatial position probability is obtained. Monte Carlo method and STK software were employed to simulate low-earth orbit micro-nano satellite launching into the same orbital position. It is confirmed that the results obtained via the theoretical model are in line with practice. Therefore, the ellipsoid theory proposed in this paper can be used to describe the satellite random position error.

Keywords: satellite orbit; initial position; random error; error ellipsoid; probability density surface

引用格式: 吴焕芹, 王茂才, 宋志明, 等. 基于椭球理论的卫星入轨位置随机误差估计方法[J]. 西北工业大学学报, 2023, 41(4): 802-811

WU Huanqin, WANG Maocai, SONG Zhiming, et al. A random error estimation method for satellites being launched into orbit based on ellipsoid theory[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2023, 41(4): 802-811 (in Chinese)