

面向 CAD、CAE 和 CAM 的自由曲面造型理论研究现状与展望

韩飞燕¹, 赵一鹏¹, 吴宝海², 张莹², 杨满芝¹, 张传伟¹

(1.西安科技大学 机械工程学院, 陕西 西安 710054;
2.西北工业大学 航空发动机高性能制造工信部重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:自由曲面造型理论是研究如何在计算机中描述和构造自由曲面,以及如何对其进行交互式显示、修改和控制的理论体系与方法。它既是计算机辅助几何设计领域的重要研究内容,也是促进 CAD/CAE/CAM 技术发展与深度融合、实现 CAX 一体化,并支撑制造业转型升级的关键。在当前面向 CAD、CAE 和 CAM 的自由曲面造型理论研究中,参数曲面造型和离散曲面造型构成了 2 个相对完整的体系框架,它们相互关联且相互补充,成为了该领域研究的主要分支,并且也是应用最广泛、影响最为深远的理论。基于此,以上述 2 个分支为切入点,从理论方法、商用软件和工程应用 3 个层面,综合分析了面向 CAD、CAE 和 CAM 的自由曲面造型理论研究与应用现状,并从曲面造型能力和造型质量等方面对比总结了不同造型方法的特点,展望了自由曲面造型理论的未来发展趋势。

关键词:CAD/CAE/CAM;自由曲面造型;计算机辅助几何设计;CAX 一体化;参数曲面造型;离散曲面造型

中图分类号:TP391.7

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2025)05-1041-14

自由曲面造型理论起源于航空航天、汽车、船舶等工业领域,它是研究如何在计算机环境中描述和构造自由曲面,以及如何对其进行交互式显示、修改和控制的理论体系与方法。在当今智能制造的宏观战略背景下,自由曲面造型理论不仅是计算机辅助几何设计(CAGD)^[1]领域的核心内容,也是驱动 CAD/CAE/CAM 技术发展与深度融合、实现 CAX 一体化及支撑制造业智能化转型升级的重要基础。

目前工业产品外形曲面可分为 2 类^[2]:第一类是可用数学方程描述的初等解析曲面,如圆柱面、球面等;第二类是形式自由变化、不能用简单数学方程描述的自由曲面,如飞机、汽车等外形曲面。自由曲面是工业产品设计制造中最基础的几何造型之一,

它不仅能适应产品设计制造的复杂性和多样性,还能潜在提高产品生产效率和制造精度。

如何在计算机中描述和构造自由曲面,是自由曲面造型理论的核心研究内容。在面向 CAD、CAE 和 CAM 的研究与应用中,参数曲面造型与离散曲面造型构成了 2 个相互关联且相互补充的相对完整体系,它们是该研究领域的主要分支,应用广泛且影响深远。因此鉴于自由曲面造型理论的重要研究意义,以下将基于上述 2 个体系框架,从理论方法、商用软件和工程应用 3 个层面,综合分析该理论研究与应用现状,并以曲面造型能力和造型质量等为评价指标,对比总结不同造型方法的特点,最后展望自由曲面造型理论未来的发展趋势。深化对自由曲面造型理论的研究,不仅能够为数字化设计奠定新的理论基础,而且有助于推动设计-分析-制造一体化进程,为制造业的转型升级提供强有力的支撑,从而全面促进智能制造战略的实施与发展。

收稿日期:2024-10-25

基金项目:西安市科技局高校院所科技人员服务企业项目(2024JH-GXFW-0195)与陕西省教育厅服务地方专项项目(23JC050)资助

作者简介:韩飞燕(1983—),副教授

通信作者:韩飞燕(1983—) e-mail:hanfeiyang@126.com

1 参数曲面造型理论

参数曲面是在参数空间中基于参数方程以若干参数表示及形状调控的曲面。参数方程定义了参数空间到实际空间的映射关系,该映射有利于计算机几何形状精确描述及显示,因此参数曲面造型是目前 CAX 系统中最常用的自由曲面表示形式。

1.1 参数曲面造型的发展

自由曲线曲面的参数化形式始于 Ferguson,奠基于 Coons、Bézier 等人。Ferguson^[3]首先提出了将曲线曲面表示为参数的矢量函数法,并引入了参数三次曲线,构造了由四角点位矢及两方向切矢定义的双三次 Ferguson 曲面,自此该曲线曲面的参数化形式成为了形状数学描述的标准形式。但 Ferguson 曲面存在角点平坦化问题,会导致曲面奇异点处的法矢不连续,进而影响曲面的光顺性。随后 Coons^[4]引入了超限插值的概念,提出了仅给定可围成封闭区域的 4 条边界曲线,就可定义 1 块曲面的方法,并基于此构造了 Coons 曲面。目前工程中应用最广的是双三次 Coons 曲面,它与双三次 Ferguson 曲面的主要区别在于允许在曲面角点处的扭矢为非零矢量。因此,该曲面内部可以引入额外的形变,角点处的曲面形状也可以进一步调整,所以整体上更平滑。但上述方法都属于基于特定边界几何条件通过插值原理构造曲面的方法,不适用于曲面交互式设计;此外当边界曲线的性质不一致或曲面曲率突变时,难以保证多个曲面光滑拼接。

因此相较于上述方法,基于逼近原理的 Bézier 方法更适应曲面交互式设计。Bézier 方法于 20 世纪 60 年代由 Bézier 提出,它被成功应用到自由曲线曲面设计系统 UNISURF 中^[5]。早期 Bézier 方法由 Bézier 基函数定义,该定义较复杂且几何不直观,不便于工程应用,因此 Forrest 将它推广到了被广泛应用的 Bernstein 基函数定义形式,并构造了矩形域张量积 Bézier 曲面和三角域 Bézier 曲面。目前工程上应用最多的张量积 Bézier 曲面由 2 条以 Bernstein 基函数定义的样条曲线通过张量积方式生成, $m \times n$ 次张量积 Bézier 曲面定义为

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v), u, v \in [0, 1] \quad (1)$$

式中: P_{ij} ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) 是曲面上对

应的控制顶点,呈拓扑矩形阵列; $B_{i,m}(u) = C_i^m u^i (1-u)^{m-i}$ 是参数 u 方向 m 次 Bernstein 基函数, $B_{j,n}(v) = C_j^n v^j (1-v)^{n-j}$ 是参数 v 方向 n 次 Bernstein 基函数。

Bézier 曲面具有几何与仿射不变性、凸包性、保凸性、对称性、端点插值性等性质,可以通过移动控制点进行整体形状控制,但不能局部控制;此外 Bézier 曲面必须经过起始和终止的控制点,因此难以保证多个曲面的高阶平滑拼接。

基于此,为克服张量积 Bézier 曲面的缺陷,由 Schoenberg 提出的 B 样条 (basis-splines),逐渐引起了学术界的重视。1972 年 De Boor^[6] 和 Cox^[7] 分别独立给出了 B 样条标准计算方法;De Boor-Cox 递推公式。随后 Gordon 和 Riesenfeld^[8] 将 B 样条引入了 CAGD,用于构造 B 样条曲面。B 样条曲面和张量积 Bézier 曲面构造原理相同,区别在于前者以 B 样条基函数取代了 Bernstein 基函数,即将 (1) 式中 $B_{i,m}(u)$ 和 $B_{j,n}(v)$ 由 Bernstein 基函数替换为 B 样条基函数。B 样条基函数以 De Boor-Cox 递推公式定义

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,m}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} N_{i,m-1}(u) + \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} N_{i+1,m-1}(u) \end{cases} \quad (2)$$

规定 $0/0 = 0$

式中:规定 $0/0 = 0$ 是为了在 B 样条基函数实际值为零的区域(即定义域外)也能顺利进行计算,避免零除错误,保证递归过程的数学严谨性。由定义可知,B 样条曲面可看作 Bézier 曲面的一般化,它既继承了 Bézier 曲面的优点,又由于可调整控制点的位置和节点矢量,因此能够实现曲面形状的灵活控制,克服了 Bézier 曲面无法局部修改的缺陷,此外还可以实现多个曲面的光滑拼接。

尽管 B 样条方法能够有效地表示自由曲面,但它却难以精确表示大部分初等解析曲面,导致自由曲面与初等解析曲面缺乏统一的数学描述形式,因此 Piegl 等^[9] 在 Versprille 提出的有理 B 样条基础上,推出了统一 2 种曲面的非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-spline, NURBS) 方法。

1.2 NURBS 曲面造型

目前 NURBS 方法是商用 CAD/CAM 系统中标

准的曲面表示方法。以 NURBS 方法表示的曲面通常定义于矩形参数域上,有理分式形式的 $k \times l$ 次 NURBS 曲面定义为^[9]

$$p(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} P_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}, \quad u,v \in [0,1] \quad (3)$$

式中: $P_{ij}(i = 0,1,\cdots,m; j = 0,1,\cdots,n)$ 是曲面上对应的控制顶点,呈拓扑矩形阵列; ω_{ij} 是与控制顶点关联的权因子,其中 $\omega_{00}, \omega_{m0}, \omega_{0n}, \omega_{mn}$ 均大于零,其余 $\omega_{ij} \geq 0$,且顺序相连 $k \times l$ 个权因子不同时为零; $N_{i,k}(u)$ 和 $N_{j,l}(v)$ 分别是 k 次和 l 次 B 样条基函数,分别由向节点矢量 $\mathbf{U} = [u_0, u_1, \cdots, u_{m+k+1}]$ 与 $\mathbf{V} = [v_0, v_1, \cdots, v_{n+l+1}]$ 按照 De Boor-Cox 递推公式定义。

因此 NURBS 方法相较于 Bézier、B 样条等方法更具优势:它在 B 样条方法的基础上通过有理化处理和权因子的引入,在统一表示初等解析曲面和自由曲面的同时,也为工业产品几何形状设计提供了更大的灵活性^[10],因此国际标准化组织 (ISO) 在 1991 年颁布的关于工业产品数据交换的 STEP 国际标准中,将 NURBS 方法作为工业产品几何形状的唯一数学描述方法^[9]。自此 NURBS 方法成为了自由曲面造型领域的研究热点,学术界也涌现出了众多基于 NURBS 方法的几何造型相关研究^[11-12]。

与此同时 NURBS 方法也被广泛应用于商用 CAD/CAM 软件系统中。国外众多 CAD/CAM 软件早已开发了 NURBS 建模功能,如达索的 CATIA 可实现 G3 连续的 NURBS 曲面造型,且造型精度远超其他三维 CAD 软件,被广泛应用于航空、航天、航海、汽车等领域。此外西门子的 NX (UG) 和 PTC 的 Creo (Pro/ENGINEER) 也支持 G2 连续的 NURBS 曲面造型,达索 SolidWorks、西门子 Solid Edge、McNeel Rhino、Autodesk Fusion 360 等也具备较强的 NURBS 曲面造型功能,它们的应用范围遍布产品概念设计到生产制造的全过程。

而国产 CAD/CAM 软件目前正处于起步阶段,由于几何建模内核及几何约束求解器等核心技术尚未做到完全自主研发或不够成熟,如中望 3D、华天 Sinovation、数码大方 CAXA 3D 等软件仅具备基本的 NURBS 建模功能。但值得一提的是,2021 年中国科学技术大学九韶智能团队推出了国内唯一完全自主开发的 CAX 一体化工业软件内核——九韶内

核 AMCAX1.0,重点支持多边形网格建模;2024 年 9 月该团队发布了支持 NURBS 曲面建模的 4.0 版本;2024 年 12 月该团队又发布了基于 4.0 版本内核的“九韶聚力 PowerCAD 1.0-开放开源的国产高端 CAD 软件平台”^[13],以及 PowerCAD 基座暨开放应用架构 PAA 1.0。其中,九韶聚力 PowerCAD 软件平台是基于 PAA 开放架构的云端一体化高端工业设计软件平台,主要面向飞机、汽车等高端制造业场景;而 PAA 开放架构则为用户提供了一整套支持深度二次开发的开放组件和接口。该团队的研究成果标志着国产自主研发高端工业软件的重大突破。

综上,尽管 NURBS 方法应用很广,但它也暴露出了很多缺陷:比如张量积结构须保证参数域 u 和 v 方向节点数相等,因此 NURBS 曲面无法真正做到局部细分,导致表示的几何模型控制点冗余,也导致在呈现具有非规则边界或带有孔洞的几何形状时,无法直接用单张曲面表示,而必须通过多张裁剪后的 NURBS 曲面拼接^[14],但裁剪与拼接操作常常会导致新构造曲面存在缝隙或褶皱,不仅影响几何造型的精度,还不利于 CAD/CAE 融合,且易造成 CAM 阶段规划的数控加工刀轨不光顺。为了解决上述问题,2003 年 Sederberg 等^[15]提出了 T 样条 (T-splines) 并将它引入了 CAGD 领域。

1.3 T 样条曲面造型

T 样条曲面和 NURBS 曲面都具有参数域原像及欧式空间曲面,但不同于 NURBS 曲面的矩形张量积结构,用于定义 T 样条曲面的欧式空间控制网格,是具有 T 型节点的参数域 T 网格在欧氏空间中的映射,控制网格由控制顶点及连接点相连而成,控制顶点和连接边决定了曲面在欧式空间中的形状和拓扑结构,且控制网格中的控制点与参数域网格节点一一对应。 n 个控制顶点的 T 样条曲面定义为

$$p(s,t) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i P_i B_i(s,t)}{\sum_{i=1}^n \omega_i B_i(s,t)} \quad (4)$$

式中: P_i 为控制顶点; ω_i 为权重; $B_i(s,t)$ 为混合函数,定义为: $B_i(s,t) = N_i(s) N_i(t)$,其中 $N_i(s)$ 和 $N_i(t)$ 分别是该控制顶点在 s 方向和 t 方向的 B 样条基函数。

由定义可知,T 样条曲面摆脱了张量积结构的约束,如图 1 所示,相较于 NURBS 曲面,T 样条曲面可通过局部细分算法在 T 网格中插入新的 T 型节

点^[16](图 1b)中红色点),以实现真正意义上的曲面局部细分。T 样条的局部细分算法作为 T 样条的核心算法^[17],赋予 T 样条更加灵活的拓扑特性和更加优良的局部细分性,可以使用更少的控制顶点来描述模型,因此有效减少了控制点冗余^[18](如图 2 所示,对于同一个模型建模,NURBS 方法需要 890 个控制点,T 样条方法仅需 322 个控制点^[16]),且还可以表示任意拓扑的自由曲面,无须裁剪、拼接等操作,同时,还可将多个 NURBS 曲面合并为单一、水密、平滑的 T 样条曲面^[18-19]。此外,它还与 NURBS 曲面兼容。

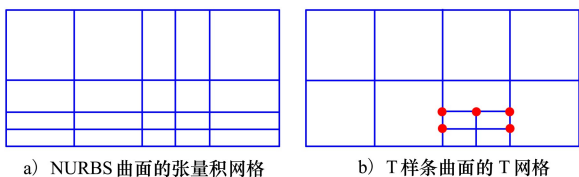


图 1 2 种曲面的局部细分能力对比

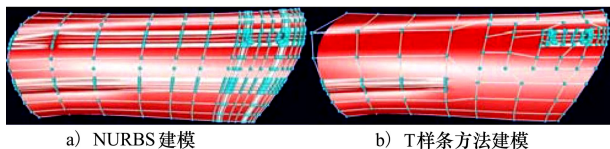


图 2 基于 NURBS 方法和 T 样条方法的车门建模对比^[16]

在面向实际应用中,随着局部细分等算法研究的不断深入,T 样条逐渐衍生出了多个变种以适应多样化的应用需求。比如,由于 T 样条自由的拓扑结构难以保证混合函数线性独立性与单位分解性^[20],2012 年 Scott 等^[21]提出了适合分析的 T 样条 (AST 样条),它定义于特殊的 T 网格上,如图 3 所示该网格要求水平与竖直方向红色 T 型节点的扩展线两两不相交。AST 样条不仅具备 NURBS 的所有优良性质,而且还提供了高效的局部细分算法,使其在处理复杂几何形状时具有很高的灵活性^[22],它是目前影响最大、应用最广的 T 样条变种,主要用于计算机辅助设计和分析。之后,为减少 T 样条局部细分过程中不必要的扩散控制点数目,Li 等^[23]放松了 AST 网格的限制条件,于 2018 年提出了 AS++ 样条。随后,为避免局部细分过程中产生冗余控制点,2019 年 Li 等^[24]提出了新变种 S 样条。2021 年 Li 等^[25]又提出了任意次数的 AS++ 样条。上述变种的出现极大地推动了 T 样条理论的发展与应用。

在几何造型方面,NURBS 方法存在控制顶点冗余,因此学者们基于 T 样条几何表示的简洁性,大

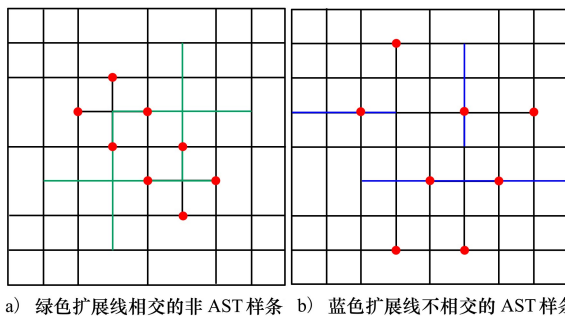


图 3 2 种 T 网格的结构对比

幅简化了几何模型,例如鹿昱等^[26]以输入点云的曲率信息,构建出了初始 T 网格并将其转化为初始 AST 网格,基于最小二乘法求解控制顶点,重建出了 AST 样条涡轮叶片模型。又由于 T 样条曲面具有卓越的平滑度,Arapakopoulos 等^[27]以一系列控制点分别构建出了船用螺旋桨叶片和轮毂的控制网格,并将其拼接成整体,构造出了螺旋桨 T 样条控制网格,生成了相应的 T 样条曲面模型。为了解决 2 个不兼容 NURBS 曲面或 2 个 T 样条曲面的混合问题,Yang 等^[28]提出了基于 T 样条的半 NURBS 曲面融合方法,通过合理布置拓扑 T 网格,将 T 样条间 C^0 连续约束转化为显式解析式以构造混合曲面,生成了单一水密 T 样条曲面模型。此外,也有学者研究了 T 样条拟合算法及其应用^[29-30]。

但在实际应用中,T 型节点的插入使得数据结构复杂,导致编程实现较困难。基于此,肖文磊等^[31]提出了包括参数层、拓扑层和笛卡儿层的 T 样条新型 3 层数据结构,将 T 网格中包含的信息分别存储在其中,基于此开发了一款适合 T 样条数据存储和计算的新型开源内核;基于 3 层数据结构,设计了涵盖面内节点初始化、关键参数抽取、高效基函数计算、T 形节点判定、重节点判定、奇偶次样条一般化表示等内核算法,以实现时空计算效率的最优化。在目前的研究中,缺乏从编程实现角度直接处理非结构化 T 样条的方法,因此 Wang 等^[32]改进了半边数据结构,通过建立各面局部坐标系并存储了影响顶点及其相对坐标,满足了非结构化 T 样条的存储和计算要求;同时还开发了用于提高 T 样条曲面计算效率的局部参数化算法,从而简化了非结构化 T 样条曲面的编程实现并提高了计算效率。

在商业软件方面,目前支持 T 样条造型功能的软件较少。Sederberg 在提出 T 样条后,基于 Maya

系统开发了 T 样条造型插件,并创办了 T-splines 公司为 Rhino 和 SolidWorks 提供 T-样条建模插件。2011 年 Autodesk 公司收购了 T-Splines 公司并开发出了支持 T 样条造型功能的 Fusion360 软件。近年来,国内也有 T 样条造型功能软件的研发,上文提到的中国科学技术大学九韶智能团队,于 2022 年 9 月发布了支持 T 网格样条建模的九韶 AMCAX 2.0 内核,该内核是国内唯一支持 T 样条曲面建模的工业软件内核,目前已更迭至 4.4 版本,该版本内核采用独创的 T 网格样条建模,突破了航空气动曲面造型的技术难点,可满足飞机外形设计和结构仿真等关键需求,它是国产 CAX 软件领域的一大突破。

从 Ferguson 曲面到 T 样条曲面,为寻找一种同时满足形状表示与几何设计要求,又便于产品数据交换的数学表达方式,参数曲面造型理论已发展更迭了数十年。作为该理论体系中最新且相对成熟的一部分,T 样条理论目前仍存在一些缺陷,例如局部细分时会丢失控制点间的拓扑结构、在一般的 T 网格中难以保证基函数线性无关因此不利于工程分析、不规则的 T 形连接节点会增加数据结构记录工作量等,但它凭借强大的造型能力与局部细分性,已展现出了广阔的研究价值与应用潜力。

2 离散曲面造型理论

2.1 多边形网格造型

多边形网格(polygonal mesh)造型,是通过三角形、四边形或其他简单形状平面多边形面片,直接表示或逼近真实三维模型的离散曲面造型方式^[33]。它仅需存储各多边形顶点位置坐标及相互间的连接关系,就可表达模型的几何和拓扑信息,相较于参数曲面造型方式,它具有形式简洁、造型速度快、便于显示、易于数据交换及可表达任意拓扑形状等优势^[33]。因此,多边形网格造型在几何造型^[33]、分析^[34]以及动画、游戏等建模中皆有广泛的应用。

在工程应用中,多边形网格主要通过点云数据拟合^[35]或由参数曲面离散^[36]生成。目前,不断进步的三维数据采集技术及相关设备,为生成具有高分辨率和精确度的多边形网格模型提供了坚实的基础。在逆向工程等领域,该方法被广泛用于构建三维形体的多边形网格模型,通过该方法构建的多边形网格模型不仅能够显著缩短产品的研发周期,而且能够确保模型的精度满足设计要求。在软件应用

方面,目前 CATIA、NX、Creo、SolidWorks、Rhino、ANSYS 等主流 CAX 软件都开发出了多边形网格造型功能。

同时多边形网格造型也可用于数控加工过程的几何建模与仿真,例如在多轴铣削加工中,工件表面几何形状和刀轨的复杂变化,极大地增加了刀具-工件切削啮合仿真的难度,而刀具-工件啮合仿真对于切削参数优化至关重要。因此,通过建立基于三角网格的刀具-工件啮合系统几何模型,可以有效提高切削力和切削扭矩预测的准确性^[37-38]。此外,面向 CAM 的多边形网格曲面参数化也是研究的重点。传统的网格曲面加工轨迹生成方法计算复杂且容易造成轨迹冗余,而通过网格曲面参数化后,复杂的空间轨迹规划可以降低至二维参数域内进行,能够充分借鉴平面中的轨迹规划方法,降低计算复杂度且算法更稳定^[39]。针对采用网格曲面参数化进行轨迹规划时,存在非线性映射变形导致加工残高不均匀的问题。Xu 等^[40]基于映射变形分析计算出了各向异性映射拉伸因子,随后采用方向映射与长度映射将三维路径参数转换到二维参数域上,并基于此生成原始偏移曲线,之后通过非均匀偏移法生成了等残高路径,再经逆映射获得网格表面上的刀轨。由于目前缺乏通用且高效可靠的三角网格曲面加工刀轨生成方法,且现有方法生成的刀轨在平滑度和残高限制方面表现不佳,Liang 等^[41]通过调和映射将三角网格曲面映射到单位圆域,并基于此构建了最短边界路径图(SBPG),通过将 SBPG 的轮廓逆映射至物理域生成了网格表面刀路。实验表明,以该方法生成的刀路可以平滑、均匀地覆盖除鞍区外的曲面,有效保证了所需的残高限制。

综上,尽管多边形网格造型应用较广,但它却存在以下缺点:多边形网格几何造型精度较低,且仅能达到 C^0 连续;多边形网格曲面无参数域^[42]表达的曲面几何信息比较有限^[43],因此导致修改性不佳;在表示复杂模型时存在数据冗余的问题,不利于 CAD/CAE/CAM 系统间数据存储和传输^[44]。因此在工程上,多边形网格造型主要应用于对几何精度和光顺性要求不高的曲面建模中。因此在目前众多的曲面造型系统中,多边形网格表示方法往往和其他的曲面表示方法相结合运用。为克服上述缺点,由多边形网格曲面发展而来的细分曲面造型不断发展壮大,并被广泛应用于自由曲面造型领域。

2.2 细分曲面造型

细分曲面(subdivision surface)造型是对初始多边形网格逐层加密顶点得到极限网格序列的离散曲面造型方式,它兼具了参数曲面的精确几何表示、高阶连续性优势及多边形网格的任意拓扑特性,适用于复杂曲面设计,因此逐渐成为了研究热点。

细分思想源于 Rham 以多边形割角方式描述光滑曲线。1974 年 Chaikin^[45]通过对一个闭合 2D 多边形重复割角,得到了近乎光滑的极限曲线,该方法即为 Rham 割角思想的具体实现。1978 年细分技术迎来了重要的里程碑,Catmull、Clark 和 Doo、Sabin 分别提出了将双三次、双二次 B 样条曲面推广至任意拓扑网格的细分方法,即 Catmull-Clark 细分^[46]与 Doo-Sabin 细分^[47],标志着细分正式成为曲面表示的方法。1987 年 Loop^[48]基于 Box 样条细分方法提出了将四次三向箱样条推广到任意三角网格的 Loop 细分。1990 年 Dyn 等^[49]提出了基于三角网格的插值细分方法,并构造了可插值初始控制网格所有顶点及细分新点的蝶形(butterfly)细分曲面。上述 4 种细分方法奠定了细分曲面理论的基础。

自 90 年代中期,细分方法经历了十余年的改进和完善,比如学者们提出了改进蝶形细分算法^[50]等。由于降低细分时网格数量增速是学者们的研究重点,Kobbelt^[51]提出了细分方法,其面分裂速度一分为三,除奇异点外皆可达到 C^2 连续;Labsik 等^[52]提出了插值 $\sqrt{3}$ 细分方法,它具备和细分方法相同的拓扑分裂规则,但顶点几何规则却类似于蝶形细分;Li 等^[53]提出了 $\sqrt{2}$ 细分,该方法在每个四边形中心插入新点并将它们与原有四边形的顶点相连,以 $\sqrt{2}$ 为分离因子舍弃了原有网格的边,达到网格细分效果。此外,为了兼容 NURBS,Müller 等^[54]基于 NURBS 曲面的局部控制点,提出了同时兼容 NURBS 和 Catmull-Clark 曲面的扩展细分曲面。

近些年,针对不同的需求,新的细分方法被陆续提出。Wei 等^[55]旨在提高截断分层 Catmull-Clark 细分的局部细化效率,提出了扩展的截断分层 Catmull-Clark 细分方法,该方法的 Catmull-Clark 基函数直接作用于具有多个奇异节点的无效单元,可作为任意四边网格等几何分析的基础。由于鲜有研究将非均匀插值细分曲线方法扩展至曲面,Li 等^[56]首次尝试将非均匀四点插值曲线细分推广到具有奇异点的曲面上,针对具有任意流形拓扑的任意多边形网

格提出了非均匀参数化的插值细分方法,该方法可提高曲面细分质量。针对非均匀样条曲线细分方法在任意拓扑结构下的收敛速度问题,Li 等^[57]提出了新非均匀细分曲面(HNUSS),该曲面在奇异点 C^1 连续,数值实验表明将其应用于等几何分析时,收敛率优于所有的非均匀细分曲面。为更灵活地调整极限曲面,Nour 等^[58]提出了新的非平稳双变量细分方法,可在除奇异点/面外的区域生成连续高阶细分曲面,且给出了在混合细分曲面上生成尖锐和半尖锐特征的算法。为解决现有节点插入策略中细分曲面随节点间隔扰动不连续变化的问题,Luo 等^[59]在文献^[56]的基础上,将双三次 HNUSS 推广至更高阶的混合非均匀细分,确保了与更高阶 NURBS 的兼容性。这些新细分方法在扩充细分曲面理论的同时也促使相关理论投入了应用。

在几何造型领域,细分曲面克服了 NURBS 曲面在裁剪、拼接时计算量大且易产生误差的缺陷,尤其在曲面重建中能有效保证模型的细节特征。Zhang 等^[60]以改进的网格简化算法构建并简化了控制网格,基于蝶型细分重建了人脸模型,有效保持了对对象的重要特征。杨志飞等^[61]基于 Powell-Sabin 细分重建了鞍面等模型,该方法可捕获三角网格呈现的几何细节,且重建误差较小。将细分方法与骨架驱动变形融合,适合于具有丰富几何细节的复杂模型,基于此张湘玉等^[62]提出了基于细分的骨架驱动网格模型变形方法,并给出了骆驼模型的骨架驱动变形过程,验证了该方法可有效保持模型细节特征。此外,目前 CATIA、NX、Rhino、ANSYS 等 CAD/CAE 软件都具备细分曲面造型功能。上述应用说明细分曲面在几何建模方面的优势。

尽管细分曲面造型优点多且应用较广,但仍有一些固有缺陷:通过迭代细化初始网格提升了曲面精度,却导致网格数量剧增,增加了存储、传输和显示负担。虽然已有一些增速较慢的细分方法^[52-53]的相关研究,但仍不足以满足工程需求。此外,尽管细分曲面整体连续性高,但它局部控制能力有限,难以修改和编辑局部形状,且现有改进研究仅针对于 Catmull-Clark 细分曲面的局部控制^[63]。另外,细分曲面和参数曲面是目前主要的曲面表示方法,但它们理论差异大。虽然有将 NURBS 转换为细分曲面的研究^[64-65],但仍难以将两者融合及进行相关的求交、求差等布尔运算。综上,细分曲面造型未来的研究重点在于解决表示精度与网格增速间的矛盾,保

持曲面整体连续性且实现有效的局部编辑和修改，前文提到的各类造型理论的特点。以及将参数造型和细分造型统一融合。表 1 对比了

表 1 自由曲面造型的特点对比

曲面	造型能力	曲面光顺性	拼接和过渡	局部修改
Ferguson 曲面	可根据四角点位矢及两方向切矢构造稍复杂曲面	内部较光顺;角点处易平坦化影响整体光顺性	在拼接处需精确匹配位矢及切矢,难以保证多曲面光滑拼接	不支持
Coons 曲面	可根据四条边界曲线构造较复杂曲面	允许角点扭矢非零,边界条件和片间连续良好时整体较光顺	可通过特殊插值在四边处实现拼接,但难以保证多曲面光滑拼接	不支持
Bézier 曲面	可根据控制点构造较复杂曲面	由控制点控制形状,光顺性良好	必须经过起始、终止控制点,不利于曲面拼接	不支持
B 样条曲面	可根据基函数和控制点构造复杂曲面	可通过节点矢量和控制点调整形状,光顺性较优	使用统一的节点矢量时,可实现多个曲面高阶连续平滑拼接	支持
NURBS 曲面	可精确统一表示初等解析曲面和自由曲面	可通过节点矢量、权因子和控制点调整形状,光顺性较优	使用统一的节点矢量时,可实现多个曲面高阶连续平滑拼接	支持
T 样条曲面	可精确表示复杂拓扑曲面及合并多个曲面	在局部细化区域仍能保持较高的光顺性,整体光顺性优异	拼接较少,且在拼接和过渡时可以较好地实现连续性	支持
多边形网格	可构造任意拓扑的低精度、低光顺度曲面	主要通过增加多边形数量与平滑算法有限提升曲面光顺性	匹配顶点和边实现拼接,通过法矢平滑和拓扑调整实现过渡	支持
细分曲面	可通过简单网格迭代细分生成任意拓扑水密、光滑曲面	可通过初始网格迭代细分达到较高光顺性	通过细分规则可以有效地实现曲面间的平滑拼接与自然过渡	支持

3 自由曲面造型理论的其他应用

除了几何造型及 CAX 软件应用,自由曲面造型理论也被广泛应用于工程分析与制造领域,主要包括等几何分析和曲面数控加工刀具轨迹规划等。

3.1 等几何分析

等几何分析(isogeometric Analysis,IGA)是一种将用于表达几何模型的样条基函数,作为有限元位移场插值形函数的数值计算方法^[66],它打破了 CAD/CAE 因底层几何表示不兼容的壁垒,免去了复杂网格划分过程且可精确表示几何模型。等几何分析源于 NURBS 理论,2005 年由 Hughes 等^[66]创立,该方法求解精度高、稳定性好,受到了相关研究者的青睐。为解决梁单元与五自由度退化壳单元的直接耦合问题,Hao 等^[67]以 NURBS 曲面表征加强筋蒙皮和筋条,并基于 IGA 研究了加筋板的屈曲行为,通过对比 Abaqus 中模型的精度和网格划分效果,验证了该方法的普适性与高效性。将 IGA 用于形状优化,即可做到以较少控制点精确表示与调整

几何结构,因此 Cai 等^[68]以基于 NURBS 单元的 IGA 分析并优化了壳体结构的形状。由于传统有限元法对于摆线针轮传动的多齿接触问题分析效率较低,Zhang 等^[69]基于 NURBS 重构了摆线针轮齿廓,并生成了摆线齿-销啮合曲面,建立了摆线针轮传动的等几何分析模型,求解不同输入角下啮合副的接触应力,并对比了有限元法,验证了等几何分析在提高传动接触仿真精度方面的有效性。可以看出,基于 NURBS 的 IGA 展现出了远超有限元方法的优势,它是工程分析领域的一大突破。

但是,由于 NURBS 张量积结构的限制,基于 NURBS 的 IGA 无法局部细分,限制了它的应用,考虑到 T 样条具备优良的局部细分特性,Bazilevs 等^[70]提出了基于 T 样条的 IGA,之后,学者们相继进行了相关研究。由于非结构 T 样条网格与无异常点网格的性质不同,如何处理带异常点的非结构 T 样条网格一直是 IGA 的研究热点。Liu 等^[71]基于非结构 T 样条开发了用于大型薄壳结构分析模型离散的 Kirchhoff-Love 壳单元,并将大型薄壳结构分析模型划分为由多个非结构 T 样条片组成的子结

构,并提出了降低 IGA 模型刚度矩阵的方法,提高了它的等几何分析效率,以卡塞格林天线模型(见图 4)验证了所提方法的有效性。目前,适合分析的 T 样条是实现薄壁结构设计与分析无缝集成的有效方法。Wei 等^[72]将 Fusion360 中构建的 T 样条汽车零件模型的控制网格与 AST 样条基函数相结合,构建了 AST 样条模型,并提取它的 Bézier 信息导入 LS-DYNA 软件中求解了模型特征值问题,对比传统有限元方法,该方法的分析结果一致性较高。此外,由于曲面模型缺少内部信息,无法直接用于等几何分析,因此将曲面模型转化为 T 样条实体模型,也是推动等几何分析实用化的关键技术之一,一些学者在该方面进行了研究^[20,73]。总之,T 样条方法的引入,赋予了等几何分析更强大的应用潜力。

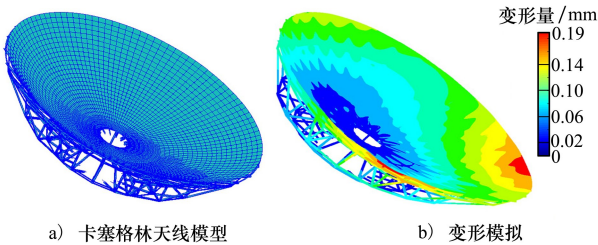


图 4 卡塞格林天线模型与变形模拟^[71]

此外,由于细分曲面能够提供高阶连续性并且精确表示任意拓扑结构,所以它也适用于等几何分析。目前,基于细分的 IGA 存在的主要问题之一是在特殊区域由于近似阶数较低,导致收敛速率不理想。为此,Kang 等^[74]将改进后几乎可以达到全局 C^2 连续的 Loop 细分曲面 (MLSS) 引入了等几何分析,可以在泊松问题中实现最佳收敛速率。Wang 等^[75]修改了双环精炼顶点的 Catmull-Clark 细分规则,并优化了在奇异位置达到 C^2 连续性的模板,基于所提出的细分方法,定义了相应的细分基函数,并建立了求解 Laplace-Beltrami 方程的等几何框架。数值算例表明,该方法在保留高质量极限曲面的同时,保持了等几何分析中的最佳收敛速率。尽管基于细分的等几何分析的不足还有待于改进,但上述研究已经展现出了细分曲面在等几何分析中的优势。

综上,等几何分析实现了 CAD/CAE 无缝集成,它的诞生、发展与自由曲面造型理论紧密相关,它也是自由曲面造型理论的重要研究和应用范畴之一。

3.2 自由曲面数控加工刀具轨迹规划

自由曲面加工刀具轨迹规划质量直接影响着加工精度和效率,因此它也是 CAM 领域的研究热点。

为了缩小 NURBS 在 CAD 和 CAM 间的应用差距,Liang 等^[76]在 NURBS 曲面参数空间中构建了最短边界测地线图 (SBGM),并将重建的 SBGM 轮廓从参数空间映射到物理空间生成了 NURBS 表面上的刀轨,该方法适用于各种 NURBS 曲面。将 NURBS 曲线应用于整体叶轮加工,可以获得更平滑的刀轨,因此 Wei 等^[77]建立了基于 NURBS 曲面的叶轮模型,以叶顶、叶根 NURBS 曲线生成了开槽和扩槽刀轨,实现了流道精加工。沿径向具有高斜率的非旋转对称自由曲面的超精密车削,缺乏有效的螺旋刀路生成方法,为此,He 等^[78]在径向笛卡尔坐标系下对离散点进行 NURBS 全局插值,构建了 NURBS 曲面,并直接利用该曲面参数,生成了螺距更均匀的自由曲面螺旋刀轨,同时将残余高度控制在较小范围内。

对于复杂的模型,NURBS 方法无法用单张曲面表示复杂形状,只能依赖于大量的裁剪与拼接操作,影响曲面刀轨的连续性。基于此,众多学者尝试在 T 样条曲面上进行刀轨规划,Liu 等^[79]基于 T 样条曲面的曲率特性,以流域技术将其划分为 1 组子区域,由于以采样点描述子区域边界并不准确,因此在参数域以 T 样条局部细化方法生成了制造适宜区,并将 T 样条曲面划分为 1 组子区域,随后针对每个子区域使用优化算法生成了精铣刀具路径。Gan 等^[80]在非规则 T 样条曲面参数域上构建了限残高路径网格,确保了加工残高不超差,剔除了非法胞腔点保证了参数域上避开孔洞范围胞腔的生成,在非规则参数域生成了无提刀的精加工刀轨,应用于鼠标凸模零件加工。

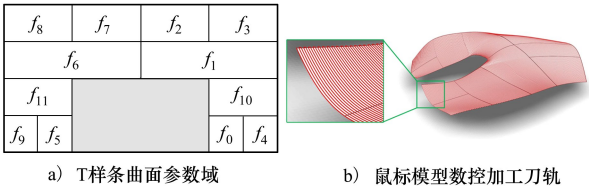


图 5 T 样条曲面的参数域分解及其数控加工刀轨规划^[81-82]

如图 5 所示,Zhao 等^[81-82]为减少不规则参数域的 T 样条曲面的刀路计算量,将其分解为 1 组尽可能大且少的正则矩形区域并填充刀轨,通过该方法

生成了精加工刀轨并在鼠标凸模零件的加工实验中获得了较好的加工质量。尽管基于 T 样条的曲面刀轨规划还不够成熟,但上述研究已证明了它相较于 NURBS 方法更具优势与前景。此外,在整体叶轮、叶盘这类结构复杂的通道类零件刀轨生成过程中,T 样条凭借强大的造型能力与局部细分特点,有望以整张水密曲面完整表示通道类零件,并做到对难加工区域的局部控制,实现可完全覆盖所有加工区域的单连通、高平滑精加工刀路的规划。

此外,也有学者研究了基于细分曲面的刀具轨迹规划^[83-84]。综上,自由曲面造型理论为曲面数控

加工提供了准确的几何信息,有利于曲面加工刀轨的生成,进而保证了产品加工质量与精度。未来,该理论的研究与发展将促进 CAD 与 CAM 的无缝衔接,从而推动曲面加工刀轨研究达到更高的水平。

4 总结与展望

目前自由曲面造型理论已形成了以 NURBS、多边形网格、细分曲面和日益成熟的 T 样条曲面为核心的多元造型理论并存的格局,它们的主要应用汇总如表 2 所示。

表 2 自由曲面造型的主要应用领域与适用问题

曲面	应用领域与适用问题
NURBS 曲面	曲面建模 ^[11-12] 、结构优化分析 ^[66-69] 、曲面加工刀轨规划 ^[76-78]
T 样条曲面	曲面建模 ^[16,19,26-27] 、曲面缝合 ^[14-15,28] 、曲面拟合 ^[29-30] 、T 样条曲面的数据结构 ^[31-32] 、适合分析的表示形式 ^[18,21-23,25,70-72] 、模型体参数化 ^[20,73] 、曲面加工刀轨规划 ^[44,79-82]
多边形网格	曲面建模 ^[33] 、结构优化分析 ^[34] 、构建数控加工仿真模型 ^[37-38] 、面向曲面加工的网格曲面参数化 ^[39,41] 、曲面加工刀轨规划 ^[36,42-43]
细分曲面	曲面建模 ^[56,60-62] 、曲面转换 ^[64-65] 、提高等几何分析的收敛速率 ^[74-75] 、曲面加工刀轨规划 ^[83-84]

上述各理论既相互补充又各具特色如图 6 所示。能够统一表示初等解析曲面和自由曲面、具备精确几何表示且高阶几何连续特点的 NURBS 曲面,仍是商业 CAX 系统及工程应用中最通用的几何表示方式;同时,以多边形网格造型和细分曲面造型为代表的离散曲面造型方式具备可以构造任意拓扑结构曲面的优势,在工业软件中仍占据着重要地位;此外,被称为“NURBS 高位替代”的 T 样条理论,具备优良的局部细分特性且可表达任意拓扑的自由曲面,目前也已展现出了巨大的应用前景,从几何造型、分析到数控加工等领域都不乏与它相关的研究与应用。上述各理论构成了 CAGD 的基础,也为 CAD/CAE/CAM 技术发展与深度融合提供了基础架构。

现总结自由曲面造型理论当前面临的主要问题,并对有潜力突破瓶颈的方向展望如下。

在设计方面,更高效、更精确地表示曲面以及打破不同造型理论之间的壁垒是目前面临的主要问题。由于 NURBS 存在无法真正做到局部细分且无法用单张曲面表示复杂模型的缺陷,随着几何模型复杂化,现有的 NURBS 方法已经难以将其精确描述出来,因此进行 NURBS 高次曲线曲面的矩阵表示形式和生成方法的相关研究可能有希望突破瓶颈;同时为保证曲面模型的几何正确性,建模中需要准确高效地进行自交判断及修复以避免曲面自交,但目前 NURBS 曲面自交检测精度和计算效率仍难以达到预期。其次,T 样条虽然能够通过任意拓扑结构描述曲面,但数据结构复杂,使得表达和编程实现较困难。此外,对于多边形网格造型和细分曲面造型,将它们与参数造型统一于同一框架内,以实现相关的布尔运算仍是一大难题。上述问题仍有待于深入研究。

在分析方面,等几何分析打破了 CAD 和 CAE 几何表示不兼容的壁垒,但也给构造更适合分析的几何模型,以分析指导设计带来了挑战。目前分析模型构造方面的研究主要以适合分析的数学表示形

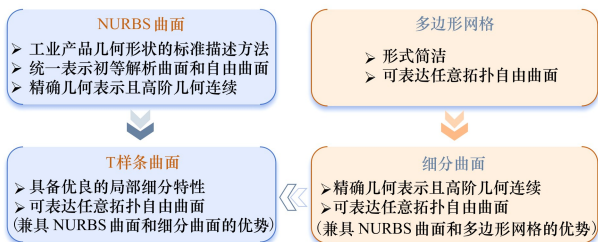


图 6 自由曲面造型理论的主要分支及其相互关联

式和曲面的内部参数化为基础。在表示形式上,当前研究集中在基于节点插入的局部细分造型方法,而基于升阶的局部细分造型方法,更有可能适合分析模型的构造;同时等几何分析需要几何模型的内部信息来赋予其物理性质,以实现模型的精确仿真分析,从而做到应用仿真结果优化几何模型,因此实现模型内部参数化也尤为关键。

在制造方面,如何根据制造需求构建考虑几何-物理耦合的多态工序演化模型,以实现设计-分析-制造一体化是 CAM 领域亟需突破的难题。具体而言,设计与分析是制造的基础,通过建立与制造过

程、参数等相关的优化模型,将曲面零件从毛坯到成品的各工序状态及其演化过程,用考虑几何与物理因素的几何模型表示出来,并进行相应的设计与分析以优化制造过程,从而做到以制造目标为导向、以制造过程为约束的可加工模型设计,实现设计-分析-制造一体化的愿景尚有待进一步实现。针对该方面,尽管 T 样条在加工制造中的研究与应用还处于初级阶段,然而,由于其具备单张曲面表达复杂形状的能力及优良的局部细分特性,T 样条有潜力将设计-分析-制造过程链接为闭环。

参考文献:

[1] BARNHILL R E, RIESENFELD R F. Computer aided geometric design[M]. Salt Lake City: Academic Press, 2014

[2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013

SHI Fazhong. Computer aided geometric design and non-uniform rational B-splines[M]. Beijing: Higher Education Press, 2013 (in Chinese)

[3] FERGUSON J. Multivariable curve interpolation[J]. Journal of the ACM, 1964, 11(2): 221-228

[4] COONS S A. Surfaces for computer-aided design of space figures[M]. Cambridge: MIT Press, 1967

[5] BEZIER P. Mathematical and practical possibilities of UNISURF[M]. Paris: Academic Press, 1974: 127-152

[6] DE BOOR C. On calculating with B-splines[J]. Journal of Approximation Theory, 1972, 6(1): 50-62

[7] COX M G. The numerical evaluation of B-splines[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1972, 10(2): 134-149

[8] GORDON W J, RIESENFELD R F. B-spline curves and surfaces[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1974: 95-126

[9] PIEGL L, TILLER W. The NURBS book[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2012

[10] PRATT M J. Introduction to ISO 10303-the step standard for product data exchange[J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2001, 1(1): 102-103

[11] ZHU L, YAN B, WANG Y, et al. Inspection of blade profile and machining deviation analysis based on sample points optimization and NURBS knot insertion[J]. Thin-Walled Structures, 2021(162): 107540

[12] XU Z, WANG A, HOU F, et al. Three-dimensional reconstruction of industrial parts from a single image[J]. Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art, 2024, 7(1): 7

[13] 合肥九韶智能科技有限公司. PowerCAD 1.0 发布, 开启中国高端 CAD 新篇章[EB/OL]. (2024-12-31) [2025-01-20]. <https://amcax.net/nd.jsp?id=1270>

[14] SEDERBERG W T, FINNIGAN T G, LI X, et al. Watertight trimmed nurbs[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): 1-8

[15] SEDERBERG W T, ZHENG J, BAKENOV A, et al. T-splines and T-NURCCs[J]. ACM Trans on Graphics, 2003, 22(3): 477-484

[16] SEDERBERG W T, CARDON L D, FINNIGAN T G, et al. T-spline simplification and local refinement[J]. ACM Trans on Graphics, 2004, 23(3): 276-283

[17] 胡文恺, 马鸿宇, 刘亚醉, 等. T 样条用于计算机辅助设计、分析和制造的新型表示方法[J]. 图学学报, 2022, 43(6): 1018-1033

HU Wenkai, MA Hongyu, LIU Yazui, et al. T-splines a new representation for CAD, CAE and CAM[J]. Journal of Graphics, 2022, 43(6): 1018-1033 (in Chinese)

[18] ZHANG J, LI X. Local refinement for analysis-suitable++ T-splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018(342): 32-45

[19] FENG C, TAGUCHI Y. FasTFit: a fast T-spline fitting algorithm[J]. Computer-Aided Design, 2017, 92: 11-21

- [20] CASQUERO H, WEI X, TOSHNIWAL D, et al. Seamless integration of design and Kirchhoff-Love shell analysis using analysis-suitable unstructured T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 360: 112765
- [21] SCOTT M, LI X, SEDERBERG T, et al. Local refinement of analysis-suitable T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 213: 206-222
- [22] KANG H, LI X. DE Boor-like evaluation algorithm for analysis-suitable T-splines[J]. *Graphical Models*, 2019, 106: 101042
- [23] LI X, ZHANG J. AS++ T-splines: linear independence and approximation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 333: 462-474
- [24] LI X, SEDERBERG W T. S-splines: a simple surface solution for IGA and CAD[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 350: 664-678
- [25] LI X, LI X. AS++ T-splines: arbitrary degree, nestedness and approximation[J]. *Numerische Mathematik*, 2021, 148: 795-816
- [26] 鹿昱, 王健, 彭立华, 等. 基于适合分析 T 样条的曲面重构方法[J]. *航空制造技术*, 2020, 63(19): 96-102
LU Yu, WANG Jian, PENG Lihua, et al. Analysis-suitable T-spline fitting for sculptured surface reconstruction[J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2020, 63(19): 96-102 (in Chinese)
- [27] ARAPAKOPOULOS A, POLICHSHUK R, SEGIZBAYEV Z, et al. Parametric models for marine propellers[J]. *Ocean Engineering*, 2019, 192: 106595
- [28] YANG J, ZHAO G, WANG W, et al. Surface blending using T-splines in semi-nurbs form[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 146: 103210
- [29] WANG A, LI L, CHANG H, et al. T-spline surface smoothing based on L-ring neighborhood space angle[J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2022, 9(4): 1246-1257
- [30] LU Z, JIANG X, HUO G, et al. A fast T-spline fitting method based on efficient region segmentation[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2020, 39(2): 55
- [31] 肖文磊, 刘亚醉, OLEKSANDR Zavalnyi, 等. T-SPLINE 开源内核的三层数据结构及算法原理[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2017, 29(11): 2023-2036
XIAO Wenlei, LIU Yazui, OLEKSANDR Zavalnyi, et al. The three-layer data structure of open source kernel T-spline and its algorithms[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2017, 29(11): 2023-2036 (in Chinese)
- [32] WANG W, ZHANG Y, DU X, et al. An efficient data structure for calculation of unstructured T-spline surfaces[J]. *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art*, 2019, 2(1): 1-9
- [33] SAVIO G, MENEGHELLO R, CONCHERI G. Geometric modeling of lattice structures for additive manufacturing[J]. *Rapid Prototyping Journal*, 2018, 24(2): 351-360
- [34] XU X, YE X, ZHANG S. A macro BDM H-div mixed finite element on polygonal and polyhedral meshes[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2024, 206: 283-297
- [35] HE X, WANG R, FENG C, et al. A novel type of boundary extraction method and its statistical improvement for unorganized point clouds based on concurrent delaunay triangular meshes[J]. *Sensors*, 2023, 23(4): 1915
- [36] LI S X, JERARD R B. 5-axis machining of sculptured surfaces with a flat-end cutter[J]. *Computer-Aided Design*, 1994, 26(3): 165-178
- [37] MA Z, CHEN Y, LI J, et al. Method of triangular mesh modeling in numerical control machining simulation[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2010, 17(5): 1021-1027
- [38] XUN G, FENG H. Cutter-workpiece engagement determination for general milling using triangle mesh modeling[J]. *Journal of Computational Design and Engineering*, 2016, 3(2): 151-160
- [39] 许晨暘, 李静蓉, 王清辉, 等. 利用 ABF++ 保角参数化的网格曲面刀轨规划[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2017, 29(4): 728-733
XU Chenyang, LI Jingrong, WANG Qinghui, et al. Tool path planning using angle-based flattening for mesh surfaces machining[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2017, 29(4): 728-733 (in Chinese)
- [40] XU C, LI J, WANG Q, et al. Contour parallel tool path planning based on conformal parameterisation utilising mapping stretch factors[J]. *International Journal of Production Research*, 2019, 57(1): 1-15
- [41] LIANG F, KANG C, FANG F. Tool path planning on triangular mesh surfaces based on the shortest boundary path graph[J].

- International Journal of Production Research, 2022, 60(9): 2683-2702
- [42] KIM H. Optimum tool path generation for 2.5d direction-parallel milling with incomplete mesh model[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2010, 24(5): 1019-1027
- [43] KIM H. Tool path generation for contour parallel milling with incomplete mesh model[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 48(5/6/7/8): 443-454
- [44] GAN W, FU J, SHEN H, et al. A morphing machining strategy for artificial bone[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2014, 15(3): 157-171
- [45] CHAIKIN G M. An algorithm for high-speed curve generation[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1974, 3(4): 346-349
- [46] CATMULL E, CLARK J. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. Computer-Aided Design, 1978, 10(6): 350-355
- [47] DOO D, SABIN M. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points[J]. Computer-Aided Design, 1978, 10(6): 356-360
- [48] LOOP C. Smooth subdivision surfaces based on triangles[D]. Salt Lake City: Univrsity of Utah, 1987
- [49] DYN N, LEVINE D, GREGORY J A. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control[J]. ACM Trans on Graphics, 1990, 9(2): 160-169
- [50] ZORIN D, SCHRÖDER P, SWELDENS W. Interpolating Subdivision for meshes with arbitrary topology[C]//Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques Louisiana, 1996: 189-192
- [51] KOBBELT L. $\sqrt{3}$ -subdivision[C]//Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, New York, 2000: 103-112
- [52] LABSIK U, GREINER G. Interpolatory $\sqrt{3}$ -subdivision[J]. Computer Graphics Forum, 2000, 19(3): 131-138
- [53] LI G, MA W, BAO H. Interpolatory/SPL radic/2-subdivision surfaces[C]//Geometric Modeling and Processing, Beijing, 2004: 185-194
- [54] MÜLLER K, REUSCHE L, FELLNER D. Extended subdivision surfaces: building a bridge between NURBS and Catmull-Clark surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(2): 268-292
- [55] WEI X, ZHANG J Y, HUGHES J T, et al. Extended truncated hierarchical catmull-clark subdivision[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 299: 316-336
- [56] LI X, CHANG Y. Non-uniform interpolatory subdivision surface[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 324: 239-253
- [57] LI X, WEI X, ZHANG J Y. Hybrid non-uniform recursive subdivision with improved convergence rates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 352: 606-624
- [58] NOUR M Y, BARRERA D, LAMNII A, et al. MTH subdivision scheme with sharp and semi-sharp features[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2024, 442: 115725
- [59] LUO F, LI X. Higher-degrees Hybrid Non-uniform Subdivision Surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2025, 179: 103822
- [60] ZHANG G, LIU X. Surface reconstruction and application of subdivision[C]//2011 International Conference on Control, Automation and Systems Engineering, 2011
- [61] 杨志飞, 施锡泉, 王伟明, 等. 基于 Powell-Sabin 细分的参数曲面重建方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2023, 35(12): 1875-1886
- YANG Zhifei, SHI Xiquan, WANG Weiming, et al. A parameterized surface reconstruction method based on powell-sabin subdivision[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2023, 35(12): 1875-1886 (in Chinese)
- [62] 张湘玉, 李明, 马希青. 基于细分的网格模型骨架驱动变形技术[J]. 计算机应用, 2015, 35(3): 811-815
- ZHANG Xiangyu, LI Ming, MA Xiqing. Skeleton-driven mesh deformation technology based on subdivision[J]. Journal of Computer Applications, 2015, 35(3): 811-815 (in Chinese)
- [63] LIN Z, LI Y, DENG C. Interpolating meshes of arbitrary topology by catmull-clark surfaces with energy constraint[J]. The Visual Computer, 2024, 40(9): 6081-6092
- [64] SHEN J, KOSINKA J, SABIN A M, et al. Conversion of trimmed NURBS surfaces to catmull-clark subdivision surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2014, 31(7/8): 486-498

- [65] SHEN J, KOSINKA J, SABIN M, et al. Converting a CAD model into a non-uniform subdivision surface[J]. Computer Aided Geometric Design, 2016, 48: 17-35
- [66] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 4135-4195
- [67] HAO P, WANG Y, TANG H, et al. A NURBS-based degenerated stiffener element for isogeometric static and buckling analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 398: 115245
- [68] CAI S, ZHANG H, ZHANG W. An integrated design approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 415: 116218
- [69] ZHANG K, GUO C, LI Y, et al. Contact analysis for cycloid pinwheel mechanism by isogeometric finite element[J]. Coatings, 2023, 13(12): 2019
- [70] BAZILEVS Y, CALO V M, COTTRELL J A, et al. Isogeometric analysis using T-splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(5/6/7/8): 229-263
- [71] LIU Z, CHENG J, YANG M, et al. Isogeometric analysis of large thin shell structures based on weak coupling of substructures with unstructured T-splines patches[J]. Advances in Engineering Software, 2019, 135: 102692
- [72] WEI X, LI X, QIAN K, et al. Analysis-suitable unstructured T-splines: Multiple extraordinary points per face[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 391: 114494.
- [73] WANG Y, LAN P, LU N, et al. T-spline based isogeometric solid element with locally varying mesh in nonlinear dynamics[J]. Acta Mechanica Sinica, 2023, 40(2): 523222
- [74] KANG H, HU W, YONG Z, et al. Isogeometric analysis based on modified loop subdivision surface with improved convergence rates[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 398: 115258
- [75] WANG X, MA W. An extended tuned subdivision scheme with optimal convergence for isogeometric analysis[J]. Computer-Aided Design, 2023, 162: 103544
- [76] LIANG F, KANG C, FANG F. A smooth tool path planning method on nurbs surface based on the shortest boundary geodesic map[J]. Journal of Manufacturing Processes, 2020, 58: 646-658
- [77] WEI J, HOU X, XU G, et al. Modeling and machining of integral impeller based on nurbs curve[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2021, 113(7/8): 1-13
- [78] HE S, XUAN J, DU W, et al. Spiral tool path generation method in a nurbs parameter space for the ultra-precision diamond turning of freeform surfaces[J]. Journal of Manufacturing Processes, 2020, 60: 340-355
- [79] LIU Y, ZHAO G, HAN P. T-spline surface toolpath generation using watershed-based feature recognition[J]. Applied Sciences, 2020, 10(19): 6790
- [80] GAN W F, FU J Z, SHEN H Y, et al. Five-axis tool path generation in CNC machining of T-spline surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2014, 52: 51-63
- [81] ZHAO G, LIU Y, XIAO W, et al. Step-compliant CNC with T-spline enabled toolpath generation capability[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018, 94(5/6/7/8): 1799-1810
- [82] ZHAO G, ZAVALNYI O, LIU Y, et al. Prospects for using T-splines for the development of the STEP-NC-based manufacturing of freeform surfaces[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 102: 1-16
- [83] ZHANG Z, FENG Y, REN B, et al. Exploratory study of spiral NC tool path generation on triangular mesh based on local subdivision[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 83: 835-845
- [84] WANG Q, FENG Y, GAO Y, et al. Smooth fillet-end cutter tool path generation method on triangular-mesh surface based on modified butterfly subdivision[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018, 98: 2831-2847

Research status and prospects of free-form surface modeling theory for CAD, CAE and CAM

HAN Feiyan¹, ZHAO Yipeng¹, WU Baohai², ZHANG Ying²,
YANG Manzhi¹, ZHANG Chuanwei¹

1.School of Mechanical Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710072, China;
2.Key Laboratory of High Performance Manufacturing for Aero Engine, Ministry of Industry and Information Technology,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

Abstract: Free-form surface modelling theory is the study of how to describe and construct free-form surfaces in the computer, and how to interactively display, modify and control them. It is not only an important research content in the field of computer-aided geometric design, but also a key factor in promoting the development and deep integration of CAD/CAE/CAM technologies, achieving CAX integration, and is the key to support the transformation and upgrading of the manufacturing industry. In the current research of free-form surface modelling theory oriented towards CAD, CAE, and CAM, parametric surface modelling and discrete surface modelling constitute two relatively complete system frameworks, which are interrelated and have complementary advantages, and have become the main branches of research in this field, as well as the most widely used and far-reaching theories. Based on the above two branches as the entry point, the current research and application status of free-form surface modelling theory for CAD, CAE and CAM is comprehensively analysed from the three levels of theoretical methods, commercial software and engineering applications, and the characteristics of different modelling methods are compared and summarized in terms of surface modelling capability and modelling quality, and finally the future development trend of free-form surface modelling theory is looked forward.

Keywords: CAD/CAE/CAM; free-form surface modelling; computer-aided geometric design; CAX integration; parametric surface modelling;discrete surface modelling

引用格式: 韩飞燕, 赵一鹏, 吴宝海, 等. 面向 CAD、CAE 和 CAM 的自由曲面造型理论研究现状与展望[J]. 西北工业大学学报, 2025, 43(5): 1041-1054
HAN Feiyan, ZHAO Yipeng, WU Baohai, et al. Research status and prospects of free-form surface modeling theory for CAD, CAE and CAM[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2025, 43(5): 1041-1054 (in Chinese)