https://doi.org/10.1051/jnwpu/20254350869

一种新的失效概率函数高效求解方法

汪昊[1], 李璐祎[1,2,3], 刘俊超[1], 袁修开[4]

(1.西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072; 2.冲击波物理与爆轰物理全国重点实验室, 四川 绵阳 621900;
3.飞行器基础布局全国重点实验室, 陕西 西安 710072; 4.厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005)

摘 要:失效概率函数的求解在基于可靠性的优化设计中具有重要意义。然而,如何高效且准确地求解失效概率函数依旧面临巨大的挑战。相对于传统的双层蒙特卡洛模拟(DMCS)方法,单层概率重分析(PRA)方法虽然能够解除求解失效概率函数的计算量对输入变量分布参数的依赖性,但对于小失效概率问题,计算代价依然难以被工程实际所接受。因此,为了进一步提高失效概率函数的求解效率,从抽样方法入手,将子集模拟重要抽样(SS-IS)与 PRA 方法相结合,提出了一种基于 SS-IS 的 PRA(SS-IS-PRA)方法。该方法能够将最终的小失效概率函数求解转化为一系列较大条件失效概率函数的乘积,并借助于 PRA 的优越性采用一组输入-输出样本同时估计所有的条件失效概率函数。另外,考虑到不同分布参数下的设计点不同,还提出了一种新的基于混合重要抽样的重要抽样密度函数构造策略。通过 2 个算例验证了 SS-IS-PRA 方法的有效性和高效性。

关 键 词:结构可靠性分析;失效概率函数;概率重分析;子集模拟;重要抽样
中图分类号:V19 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-2758(2025)05-0869-09

在实际的工程结构中,存在着诸多不确定性因素,例如,材料属性的分散性、加工误差,以及外部工作环境的变化等,都会显著影响结构的可靠性。为了量化这些不确定因素对结构失效的影响,就需要对结构进行可靠性分析。失效概率定义为在随机输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的作用下,结构的功能函数 $Y=g(\boldsymbol{X})$ 小于零的概率。

在随机不确定性框架下,结构系统随机输入变量的分布参数通常考虑为确定值,此时失效概率也是一个确定的值。然而,在基于可靠性的优化设计中,或者由于信息数据不足无法准确确定随机变量分布参数时,这些分布参数常常会被定义在一个区间内或者服从某种主观概率分布。此时失效概率将会成为一个关于分布参数的函数,被称为失效概率函数。

目前关于随机不确定性框架下的可靠性分析方法已经发展得较为成熟,大致可以分为 3 类:①近似解析法,如 FORM[1]、SORM[2]。近似解析方法在面对高度非线性问题以及多失效域问题时,难以得到正确的结构可靠度。②数值模拟方法,其中基础的方法为蒙特卡洛方法(MCS),MCS 方法以大数定律为基础,有着绝对的收敛性和广泛的适用性。但是对于小失效概率问题,MCS 方法的效率极其低下,因此常常作为各种新方法的对照方法。为了提高数值模拟方法的计算效率,学者们又提出了许多改进的数值模拟方法,比如,重要抽样法、子集模拟法、线抽样、方向抽样[3-10]。③基于代理模型的方法,常见的代理模型方法有:响应面法、混沌多项式展开、Kriging 模型[11-15]、支持向量机[16]以及人工神经网络[17]等。

以上的各种方法,都能应用到求解参数不确定情况下失效概率函数的双层法之中[18-20]。为了能够进一步提高失效概率函数的求解效率,学者们提出了多种求解失效概率函数的单层方法:Au[21]基于贝叶斯理论将失效概率函数转化为扩展失效概率和分布参数的条件联合概率密度函数(probability density function,PDF)的形式,该方法的难点主要在

收稿日期:2024-09-25
基金项目:国家自然科学基金(52375156)与冲击波物理与爆轰物理全国重点实验室稳定支持科研项目(JCKYS2024212104)资助
作者简介:汪昊(2001—),硕士研究生
通信作者:李璐祎(1987—),教授 e-mail:luyili@nwpu.edu.cn

于求解分布参数的条件联合 PDF。针对此难点，Ching 等[22]利用极大熵原理估计分布参数的后验分布，而 Yuan 等[23]则将后验分布转换为一个积分。不同于基于贝叶斯理论的单层法，Nikolaidis 等[24]基于重要抽样原理，提出了失效概率函数求解的概率重分析方法（PRA）。该方法能够利用一组重要抽样样本对不同参数下的失效概率进行估计。其实，基于重要抽样原理的失效概率函数计算方法已经被研究人员广泛关注和研究[25-28]，这些方法本质上都利用了相似的原理，但有着不同的重要抽样 PDF 的构造和选择方式。然而，传统 PRA 方法在构造抽样 PDF 时，采用的是最小化平均失效概率方差的思想[24]。这种方法直观有效，但其计算效率与其他方差缩减技术下的抽样方法相比会相对较低。

因此，为了进一步提高 PRA 方法对参数不确定下的失效概率函数的求解效率，本文从抽样方法入手，将 SS-IS 与 PRA 方法相结合，提出一种新的基于 SS-IS 的 PRA（SS-IS-PRA）方法。该方法通过将失效概率函数转化为一系列条件失效概率函数的乘积的形式，进而利用一组重要抽样样本在自适应分层策略下求解各层相应的条件失效概率函数，最终得到结构的失效概率函数。同时，为了在每一层中得到适应不同分布参数的重要抽样样本，本文将混合重要抽样的思想融入现有的 SS-IS 方法中，提出了一种新的重要抽样函数构造策略，以保证能够抽取到各个分布参数下对应的重要样本。

1 概率重分析方法

1.1 概率重分析方法基本原理

假设结构的功能函数为：

$$Y = g(\boldsymbol{X}) = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_{n_X}\}$ 为 n_X 维输入随机变量。极限状态方程 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ 将输入变量空间分为失效域 $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x}: g(\boldsymbol{x}) \leqslant 0\}$ 和安全域 $S = \{\boldsymbol{x}: g(\boldsymbol{x}) > 0\}$ 两部分。当输入变量的分布参数 $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{n_X}]^{\mathrm{T}}$ 为一个变量时，其中 $\boldsymbol{\theta}_i = [\theta_i^1, \theta_i^2, \cdots, \theta_i^{n_{\theta_i}}]$ 是由第 i 维输入变量的 n_{θ_i} 个分布参数组成的向量，总的分布参数个数记为 $n_\theta = \sum_{i=1}^{n_X} n_{\theta_i}$，结构的失效概率会成为一个随 θ 变化而变化的函数，称为失效概率函数，定义如（2）式所示。

$$P_{\mathrm{f}}(\theta) = \int_{\boldsymbol{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

式中，$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的条件联合 PDF。

（2）式可以改写为失效域指示函数 $I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})$ 的数学期望形式

$$P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\boldsymbol{F}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{R^{n_X}} I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \theta) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{X}}}(I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})) \tag{3}$$

式中：$I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})$ 为失效域指示函数，当 $x \in \boldsymbol{F}$ 时 $I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = 1$，否则 $I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = 0$；$\mathrm{E}_{f_{\boldsymbol{X}}}[\cdot]$ 为关于 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})$ 的期望算子。

类似于重要抽样的思想，PRA 方法利用一个重要抽样 PDF 代替原本的随机变量 PDF，进而采用一组重要样本去估计不同参数下的失效概率

$$P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{R^{n_X}} I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}_I)} h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}_I) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{E}_h\left[I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}_I)} \right] \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{\theta}_I$ 为重要抽样 PDF 的分布参数；$\mathrm{E}_h[\cdot]$ 为关于重要抽样 PDF 的期望算子。

失效概率函数的估计值可以由（5）式得到。

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}_i) \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{\theta}_I)} \tag{5}$$

式中，x_i 是由重要抽样 PDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}_I)$ 得到的一组样本，$i = 1, 2, \cdots, N_I$。

（5）式能够允许通过一组重要抽样样本对不同 $\boldsymbol{\theta}$ 下的失效概率进行估计。

1.2 传统抽样 PDF 的选择

在 PRA 的过程中，重要抽样 PDF 的选择至关重要，合适的 PDF 能够加快失效概率的收敛，反之则可能导致更低的计算效率。

在传统的 PRA 方法中，通过最小化（6）式中平均失效概率的方差来构造抽样 PDF。

$$\bar{P}_{\mathrm{f}} = \int_{R^{n_\theta}} P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \int_{R^{n_\theta}} \int_{R^{n_X}} I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{6}$$

式中，$f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 为分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的 PDF。

使得平均失效概率方差最小化的 PDF 如（7）式所示。

$$h_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})}{\bar{P}_{\mathrm{f}}} \tag{7}$$

式中，$h_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的最优联合 PDF，平均失效概率的估计值可以由（8）式得到。

$$\bar{P}_{\mathrm{f}} \approx \frac{1}{N_a}\sum_{i=1}^{N_a} I_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}_i) \tag{8}$$

式中,$\{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_i\}$ 是由 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的联合 PDF$f_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 产生的$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{\theta}$的样本,$i = 1,2,\cdots,N_a$;$\boldsymbol{\theta}_i$ 是服从 $f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 的样本,而 x_i,则可以看作是服从 $\boldsymbol{X}$ 边缘 PDF$\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{R^{n_\theta}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 的样本。该积分可由(9)式估计。

$$\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{R^{n_\theta}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} =$$

$$\mathrm{E}_{\Theta}[f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})] \approx \frac{1}{N_a}\sum_{i=1}^{N_a} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}_i) \tag{9}$$

式中,$\mathrm{E}_{\Theta}[\cdot]$ 是关于分布参数 PDF$f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 的期望算子,$\boldsymbol{\theta}_i$ 是由 $f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 产生的样本 $i = 1,2,\cdots,N_a$。

随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的最优抽样 PDF 如(10)式所示。

$$h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}_I) = h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = I_F(\boldsymbol{x})\frac{\int_{R^{N_\theta}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\bar{P}_{\mathrm{f}}} \tag{10}$$

由最优抽样 PDF 的定义可知,以上由 PDF$f_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ 产生的N_a个$\boldsymbol{X}$的样本中,落入失效域的样本即为由 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}_I)$ 产生的样本。

将(9) ~ (10)式代入(4)式,可得失效概率函数为

$$P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{E}_h\left[\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})\bar{P}_{\mathrm{f}}}{\int_{R^{n_\theta}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\right] = \mathrm{E}_h\left[\frac{\bar{P}_{\mathrm{f}}f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}\right] \tag{11}$$

因此,针对具体的 $\boldsymbol{\theta}^*$ 对应的失效概率可以由(12)式估计。

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}^*) = \frac{1}{N_{\mathrm{f}}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{f}}}\frac{\bar{P}_{\mathrm{f}}f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_j\mid\boldsymbol{\theta}^*)}{\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_j)} \tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{x}_j$ 为由 $h(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}_I)$ 产生的样本,$j = 1,2,\cdots,N_{\mathrm{f}}$;$\bar{P}_{\mathrm{f}}$ 和 $\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_j)$ 分别由(8) ~ (9)式估计。

由(12)式可知,由于抽取的样本并不依赖于分布参数的特定值,因此 PRA 能够仅通过一组样本对不同分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 下的失效概率进行重复估计。

2　SS-IS-PRA 方法

2.1　SS-IS

子集模拟方法的基本思想是:通过引入一系列中间失效事件 $\boldsymbol{F}_k = \{\boldsymbol{x}: g(\boldsymbol{x}) \leqslant b_k\}(k = 1,2,\cdots,m)$,其中 $b_1 > b_2 > \cdots > b_m = 0$ 为一系列临界值,将结构的失效概率转化为一系列条件失效概率的乘积的形式 $P\{\boldsymbol{F}\} = P\{F_1\}\cdot\prod_{k=2}^{m}P\{F_k\mid F_{k-1}\}$,以减少 MCS 方法在小失效概率问题中指数增长的计算量。

子集模拟中失效概率的表达式可以表示为

$$P_{\mathrm{f}} = \prod_{k=1}^{m} P_k \tag{13}$$

式中,当 $k = 1$ 时,$P_k = P\{F_1\}$,当 $k = 2,3,\cdots,m$ 时,$P_k = P\{F_k\mid F_{k-1}\}$。

SS-IS 的思想是:利用已知的条件样本来选取下一层的抽样中心以高效获取条件样本点,并逐级构造重要抽样 PDF,最终得到失效概率。其中,第 k $(k \neq 1)$ 层重要抽样中心的选择策略是:将第 $k-1$ 层得到的条件样本点中联合 PDF 最大的点作为第 k 层的重要抽样中心,并进行重要样本的获取。

2.2　SS-IS-PRA 方法的基本原理

在参数不确定的情况下,假设 $\boldsymbol{\theta} \in [\underline{\boldsymbol{\theta}},\bar{\boldsymbol{\theta}}]$,其中 $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ 表示分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的下界,$\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 表示分布参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的上界,子集模拟方法可以将最终的失效概率函数表达为一系列中间失效事件的条件失效概率函数乘积的形式。

$$P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{m} P_{\mathrm{f}}^k(\boldsymbol{\theta}) \tag{14}$$

式中:$P_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta})$ 为最终的失效概率函数;$P_{\mathrm{f}}^k(\boldsymbol{\theta})$ 表示第 k 层的条件失效概率函数。

在分布参数具有不确定性的情况下,当给定中间失效事件的临界值时,中间失效事件的条件失效概率函数 $P_{\mathrm{f}}^k(\boldsymbol{\theta})$ 会随着不同分布参数取值而变化,为了能够采用同一组样本同时估计所有的条件失效概率函数,本文将 PRA 的思想引入到 SS-IS 中。

根据 PRA 的思想,第一层的失效概率函数可以表达为(15)式,并可以通过(16)式进行估计。

$$P_{\mathrm{f}}^1(\boldsymbol{\theta}) = \int_{R^{n_X}}\frac{I_{F_1}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{15}$$

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}^1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\frac{I_{F_1}(\boldsymbol{x}_i^{(1)})f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i^{(1)}\mid\boldsymbol{\theta})}{\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i^{(1)})} \tag{16}$$

式中,$\boldsymbol{x}_i^{(1)}$ 是利用随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的边缘 PDF 得到的样本,$i = 1,2,\cdots,N_1$;$\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i^{(1)})$ 由(9)式进行估计;$\boldsymbol{\theta}_j$ 是在产生 $\boldsymbol{X}$ 的样本时由 $f_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$ 产生且同 $\boldsymbol{x}_i$ 一一对应的分布参数样本,$j = 1,2,\cdots,N_1$。

第 k 层的条件失效概率函数的表达式为

$$P_{\mathrm{f}}^{k}(\boldsymbol{\theta})=\int_{R^{n_X}}\frac{I_{F_k}(\boldsymbol{x})\cdot q_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid F_{k-1},\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})}h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{E}_{h_{\boldsymbol{X}}^{k}}\left[\frac{I_{F_k}(\boldsymbol{x})\cdot q_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid F_{k-1},\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})}\right]\tag{17}$$

式中，$\mathrm{E}_{h_{\boldsymbol{X}}^{k}}[\cdot]$ 为关于第 k 层的重要抽样 PDF$h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$ 的期望算子。

采用(18) 式估计 $\hat{P}_{\mathrm{f}}^{k}(\boldsymbol{\theta})$

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}^{k}(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}\frac{I_{F_k}(\boldsymbol{x}_i^{(k)})q_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_i^{(k)}\mid F_{k-1},\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x}_i^{(k)})}\tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{x}_i^{(k)}(i=1,2,\cdots,N_k,k=2,3,\cdots,m)$ 是通过第 k 层的重要抽样 PDF$h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$ 得到的样本。

最终失效概率函数的估计值可以表示为

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\theta})=\prod_{k=1}^{m}\hat{P}_{\mathrm{f}}^{k}(\boldsymbol{\theta})\ (k=1,2,\cdots,m)\tag{19}$$

2.3 重要抽样 PDF 的构造

对于中间层重要抽样 PDF 的构造方式有很多种，理论上无论构造何种重要抽样 PDF，在样本量足够的条件下都能得到收敛的失效概率。本文基于混合重要抽样的思想，提出一种新的参数不确定性下构造中间层 ($k\geqslant 2$) 重要抽样 PDF 的方法，第一层的样本由随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的边缘 PDF$\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ 直接产生。

中间层($k\geqslant 2$) 重要抽样 PDF 构造及重要抽样样本产生的具体过程如下：

1) 将 $\boldsymbol{\theta}$ 在其变化区间内进行离散$[\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\theta}_{N_t}]^{\mathrm{T}}$。

2) 计算出每一个 $\boldsymbol{\theta}_i(i=1,2,\cdots,N_t)$ 条件下，上一层条件样本 $\boldsymbol{x}^{(k-1)}=[\boldsymbol{x}_1^{(k-1)},\boldsymbol{x}_2^{(k-1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{N_{F_{k-1}}}^{(k-1)}]^{\mathrm{T}}$ 的联合 PDF 值，并取每个参数对应的 PDF 最大的样本点 $\boldsymbol{x}_{\max}^{(k-1)}=[\boldsymbol{x}_{\max 1}^{(k-1)},\boldsymbol{x}_{\max 2}^{(k-1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\max N_t}^{(k-1)}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{x}_{\max i}^{(k-1)}=\underset{t=1,2,\cdots,N_{F_{k-1}}}{\operatorname{argmax}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_t^{(k-1)}\mid\boldsymbol{\theta}_i),i=1,2,\cdots,N_t$。

3) 在得到一组联合 PDF 最大值对应的样本点 $\boldsymbol{x}_{\max}^{(k-1)}=[\boldsymbol{x}_{\max 1}^{(k-1)},\boldsymbol{x}_{\max 2}^{(k-1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\max N_t}^{(k-1)}]^{\mathrm{T}}$ 后，由这一组点进行抽样。在实际运算过程中会发现，矩阵 $\boldsymbol{x}_{\max}^{(k-1)}=[\boldsymbol{x}_{\max 1}^{(k-1)},\boldsymbol{x}_{\max 2}^{(k-1)},\cdots,\boldsymbol{x}_{\max N_t}^{(k-1)}]^{\mathrm{T}}$ 内会出现大量的重复点，因此可以通过赋予(20) 式中混合 PDF 中右边各项不同的权重来表示大量重复的样本点：假设 $\boldsymbol{x}_{\max}^{(k-1)}$ 中有 N_d 个不重复的样本点，$\boldsymbol{x}_s^{(k-1)}(s=1,2,\cdots,N_d)$ 中每一个样本都有 N_s 个重复的点，易知 $\sum_{s=1}^{N_d}N_s=N_t$。则以 $\boldsymbol{x}_s^{(k-1)}$ 作为抽样中心的 PDF$h_{\boldsymbol{X}}^{ks}(\boldsymbol{x})$ 在混合 PDF 中的权重即为 $\alpha_s=\frac{N_s}{N_t}(s=1,2,\cdots,N_d)$，这样 $h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$ 可以表示为

$$h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})=\sum_{s=1}^{N_d}\alpha_s h_{\boldsymbol{X}}^{ks}(\boldsymbol{x})\tag{20}$$

式中，$h_{\boldsymbol{X}}^{ks}(\boldsymbol{x})$ 为以 $x_s^{(k-1)}$ 作为抽样中心的 PDF。现假设第 k 层需要 N_k 个样本点，便可以利用每一个抽样中心对应的重要抽样 PDF$h_{\boldsymbol{X}}^{ks}(\boldsymbol{x})$，抽取$\lceil\alpha_s\times N_k\rceil$个样本点，$\lceil\cdot\rceil$为向上取整符号，最后将其组合起来，就是 $h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$ 所对应的样本点。

由以上过程可以看出，借助于混合抽样的思想，新的重要抽样 PDF 能够考虑条件样本对不同参数处失效概率的贡献大小，因而能够更加合理地产生分布参数条件下中间层的重要抽样样本。

2.4 SS-IS-PRA 方法的具体实施步骤

基于 2.2 和 2.3 节的原理，SS-IS-PRA 方法的实施步骤可总结如下：

1) 将 $\boldsymbol{\theta}$ 在其变化区间内进行离散得到 $\boldsymbol{\theta}_t=[\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\theta}_{N_t}]^{\mathrm{T}}$

2) 确定自适应分层的中间失效概率 P_0。

3) 根据随机变量分布参数的 PDF$f_{\Theta}(\theta)$ 抽取 $\boldsymbol{\theta}$ 的 N_1 个样本 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}=[\boldsymbol{\theta}_1^{(1)},\boldsymbol{\theta}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\theta}_{N_1}^{(1)}]^{\mathrm{T}}$，再根据每一组分布参数对应的 $\boldsymbol{X}$ 的条件联合 PDF$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}_i^{(1)})$ 分别抽取一个随机变量样本 $\boldsymbol{x}_i^{(1)}$，即符合 $\boldsymbol{X}$ 边缘 PDF$\bar{f}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ 的样本，$i=1,2,\cdots,N_1$。

4) 计算 N_1 个样本对应的功能函数值$[g(\boldsymbol{x}_1^{(1)}),g(\boldsymbol{x}_2^{(1)}),\cdots,g(\boldsymbol{x}_{N_1}^{(1)})]^{\mathrm{T}}$，将这 N_1 个功能函数值按照从大到小的顺序排列，$g(\boldsymbol{x}_{[1]}^{(1)})>g(\boldsymbol{x}_{[2]}^{(1)})>\cdots>g(\boldsymbol{x}_{[N_1]}^{(1)})$，取第$(1-P_0)N_1$ 个功能函数值作为中间失效事件 $F_1=\{\boldsymbol{x}:g(\boldsymbol{x})\leqslant b_1\}$ 的临界值 $b_1=g(\boldsymbol{x}_{[(1-P_0)N_1]}^{(1)})$，第一层的失效概率函数可以由(16) 式估计。

5) 根据 2.3 节的方法，从落入失效域 $F_{k-1}(k=2,3,\cdots,m)$ 中的 P_0N_{k-1} 个样本点中，挑选出第 k 层的抽样中心，根据(20) 式得到第 k 层的重要抽样 PDF$h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$，进而由 $h_{\boldsymbol{X}}^{k}(\boldsymbol{x})$ 抽取第 k 层的重要抽样样本点$[\boldsymbol{x}_1^{(k)},\boldsymbol{x}_2^{(k)},\cdots,\boldsymbol{x}_{N_k}^{(k)}]^{\mathrm{T}}$。

6) 将这 N_k 个样本点代入到功能函数中，得到其功能函数值$[g(\boldsymbol{x}_1^{(k)}),g(\boldsymbol{x}_2^{(k)}),\cdots,g(\boldsymbol{x}_{N_k}^{(k)})]^{\mathrm{T}}$，筛选出落入中间失效域 $F_{k-1}=\{\boldsymbol{x}:g(\boldsymbol{x})\leqslant b_{k-1}\}$ 内的点$[\boldsymbol{x}_1^{(k)},\boldsymbol{x}_2^{(k)},\cdots,\boldsymbol{x}_{N_{F_{k-1}}}^{(k)}]^{\mathrm{T}}$，并将其功能函数值按从大

到小进行排序 $g(\boldsymbol{x}_{[1]}^{(k)}) > g(\boldsymbol{x}_{[2]}^{(k)}) > \cdots > g(\boldsymbol{x}_{[N_{F_{k-1}}]}^{(k)})$,取第 $(1-P_0)N_{F_{k-1}}$ 个功能函数值作为中间失效事件 $F_k = \{\boldsymbol{x}: g(\boldsymbol{x}) \leqslant b_k\}$ 的临界值 $b_k = g(\boldsymbol{x}_{[(1-P_0)N_{F_{k-1}}]}^{(k)})$,那么在 F_{k-1} 发生的条件下 F_k 发生的条件失效概率函数可由(18)式估计。

7) 重复步骤 5) ~ 6),当中间失效事件的临界值 $b_m \leqslant 0$ 时则令 $b_m = 0$,那么第 m 层的条件失效概率函数可以表示为(21)式,并结束自适应分层。

$$\hat{P}_{\mathrm{f}}^{m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_m}\sum_{i=1}^{N_m}\frac{I_F(\boldsymbol{x}_i^{(m)})q_X(\boldsymbol{x}_i^{(m)} \mid F_{m-1}, \boldsymbol{\theta})}{h_X^m(\boldsymbol{x}_i^{(m)})} \tag{21}$$

8) 最终的失效概率函数估计式可以表示为(19)式。

3　算例

本节将分别使用一个数值算例和一个工程算例来验证本文所提方法的可行性,并且通过与双层蒙特卡洛 DMCS 方法、传统 PRA 方法以及基于增广空间积分的 ASI-SS 方法[21]进行对比,最终证明本文所提方法在求解失效概率函数时,既具有足够的精度,又提高了求解效率。ASI-SS 方法的变异系数由文献[21]中的公式计算得出,PRA 以及 SS-IS-PRA 的变异系数由 20 次独立的重复计算得到。

3.1　算例 1

该算例中包含 2 个随机输入变量 $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$,$\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 为相互独立的正态变量,$\boldsymbol{X}_1 \sim N(\mu_1, 1)$,$\boldsymbol{X}_2 \sim N(\mu_2, 1)$,有

$$g(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{X}_2^2)}\frac{(\boldsymbol{X}_1^2 + 3\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^2)}{10(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)} + 6.5 \tag{22}$$

考虑 μ_1,μ_2 均为设计变量,且 $\mu_1 \in [8.5, 10.5]$,$\mu_2 \in [8.5, 10.5]$。图 1 ~ 2 展示了不同方法得到的失效概率函数。

表 1 展示了不同方法下对失效概率函数极值的求解结果,其中 $\hat{\bar{P}}_{\mathrm{f}}$ 表示失效概率函数的极大值的估计值,$\hat{\underline{P}}_{\mathrm{f}}$ 表示失效概率函数的极小值的估计值,括号中的数表示 20 次独立计算得到的极值的变异系数,N 为样本池的大小,$\bar{\varepsilon}$ 表示以 DMCS 方法为对照解时,所有分布参数离散点对应的失效概率估计值的平均相对误差。

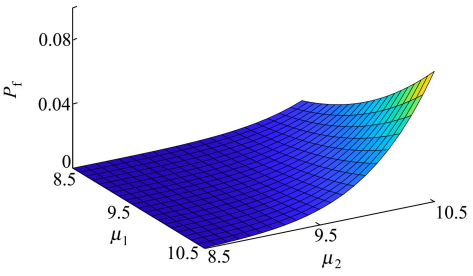
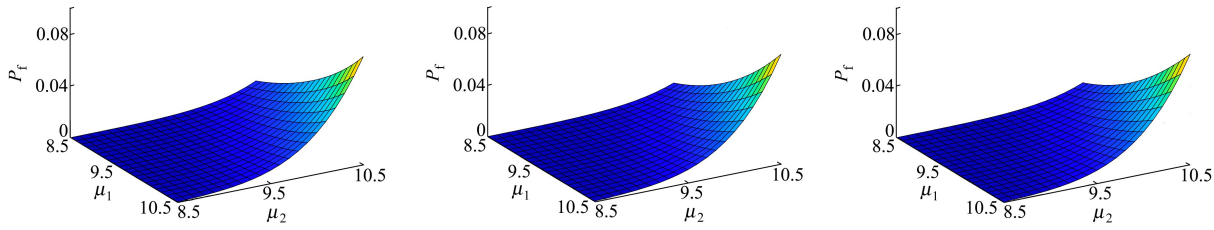


图 1　由 DMCS 方法得到的算例 1 中的失效概率函数图

表 1　算例 1 中不同方法得到的失效概率函数极值及其平均相对误差

方法	$\hat{\bar{P}}_{\mathrm{f}}$	$\hat{\underline{P}}_{\mathrm{f}}$	$\bar{\varepsilon}$/%	N
DMCS	0.081 7 (0.001 1)	3.05×10^{-5} (0.057 3)	0	441×10^7
PRA	0.082 5 (0.047 2)	3.11×10^{-5} (0.060 2)	4.77	4×10^4
ASI-SS	0.083 9 (0.21)	3.28×10^{-5} (0.188)	4.56	3 000×3
SS-IS-PRA	0.080 3 (0.041 6)	3.01×10^{-5} (0.055)	4.15	3 000×2

从表 1 中可以看出,在保证不同方法下得到的失效概率的极值均收敛的条件下,ASI-SS、PRA 和 SS-IS-PRA 方法因为其单层法的优势,样本池都远远小于 DMCS 方法。对比 PRA 和 2 种基于子集模拟的单层法可以看出,子集模拟方法与求解失效概率函数的单层法相结合时能够在保证足够精度的条件下有效地减少样本量。再对比 2 种基于子集模拟的方法,在效率上,SS-IS-PRA 所需要的样本量更少。在精度上,虽然 ASI-SS 在极大值的求解上精度略高于本文方法,但 SS-IS-PRA 在极小值以及整体的精度上都要优于 ASI-SS。并且,由于 ASI-SS 采用了 MCMC 采样,因此其变异系数会明显大于基于重要抽样的 SS-IS-PRA 方法。如图 2 可知,在保证极值收敛时,不同方法得到的失效概率图在趋势上都与 DMCS 方法相同。



a) ASI-SS 方法　b) PRA 方法　c) SS-IS-PRA 方法

图 2　由不同方法得到的算例 1 中的失效概率函数图

3.2　算例 2

在航空应用中,天线罩结构的主要目的是保护天线或雷达免受恶劣环境的影响,如外部负载、雷击、冰雹和振动,同时保持机身空气动力学形状的平滑性。这种结构不仅需要满足严格的电性能要求和空气动力学设计标准,还必须确保在复杂且恶劣的外部环境下,天线罩内部系统能够正常运行,不发生损毁或故障。因此,对飞机天线罩结构强度设计的可靠性研究显得尤为重要。某飞机上使用复合材料层合板天线罩结构的有限元模型如图 3 所示[29],该模型一共考虑了 17 个随机输入变量,其分布均为相互独立的正态分布,具体分布参数如表 2 所示。

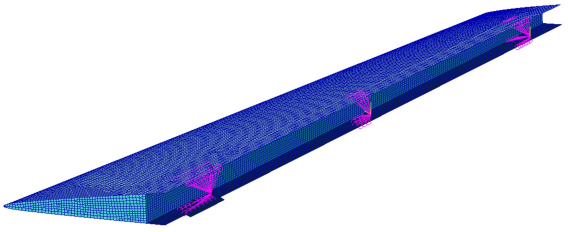


图 3　天线罩的有限元模型

考虑天线罩的最大应力不能超过许用应力值,最终系统失效可以定义为

$$\sigma_{\max} \geqslant \sigma_L,\ \sigma_L = 184\ \text{MPa}$$

为了能够使用 DMCS 得到参考解,本算例使用 500 组正态样本输入到有限元模型中,得到其输出的最大应力。将这些数据输入 BP 神经网络进行训练,得到输入输出对应的神经网络模型,神经网络收敛的误差值定为 5×10^{-4},收敛后测试集的拟合优度为 0.998 73。最后将神经网络作为系统功能函数进行后续的方法验证。

针对该算例,考虑 2 个铺层角[α_-+,$\alpha_-−$]的均值[μ_1,μ_2]为设计变量,其变化范围:$\mu_1 \in [40,50]$,$\mu_2 \in [-50,-40]$,不同方法求得的失效概率极值如表 3 所示,得到的失效概率函数的三维图如图 4~5 所示。

表 2　算例 2 中随机输入变量的分布参数

输入变量	均值	标准差
E_{11}/Pa	4.9×10^{10}	4.9×10^{9}
E_{22}/Pa	1.3×10^{10}	1.3×10^{9}
G_{12}/Pa	4.4×10^{9}	4.4×10^{8}
G_{13}/Pa	3.6×10^{9}	3.6×10^{8}
G_{23}/Pa	2.7×10^{9}	2.7×10^{8}
$\alpha_{\_0}$	0	4.5
$\alpha_{\_90}$	90	4.5
α_-+	μ_1	4.5
$\alpha_-−$	μ_2	4.5
T/m	0.000 15	0.000 015
ρ/(kg · m^2)	1 400	140
X_t/Pa	1.5×10^{9}	1.5×10^{8}
X_c/Pa	6.8×10^{8}	6.8×10^{7}
Y_t/Pa	4.1×10^{8}	4.1×10^{7}
Y_c/Pa	2.0×10^{8}	2.0×10^{7}
S/Pa	9.5×10^{7}	9.5×10^{6}
S_b/Pa	1.0×10^{8}	1.0×10^{7}

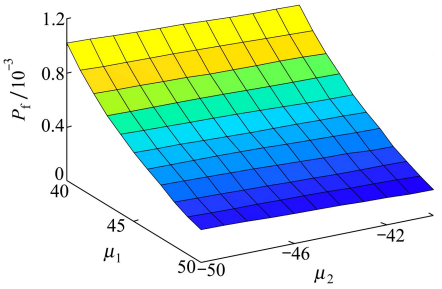


图 4　由 DMCS 方法得到的算例 2 中的失效概率函数图

表 3 所示为不同方法得到算例 2 的失效概率函数极值及其平均相对误差,括号中的数表示 20 次独立计算下得到的变异系数。从中可以看出:SS-IS-PRA 方法所用到样本量最少。对比 PRA 方法,SS-IS-PRA 方法能够显著地降低计算成本,并且在极值求解上有着更高的精度和更小的变异性,在平均误

差上要略逊于 PRA 方法。对比 ASI-SS 方法,虽然 SS-IS-PRA 方法在极小值预测精度上略逊于 ASI-SS 方法,但依旧有着更小的计算量,并且在极大值的精度和平均误差上都要优于 ASI-SS 方法,同时具有更小的变异系数。

从图 5 中可以看出,对于隐式功能函数 3 种单层法依旧能得到相同趋势的失效概率函数。另外,从失效概率函数的变化图可以看出,飞机天线罩失效概率较大的情况发生在 μ_1 的最大值处,且相较于 μ_1,μ_2 对失效概率的影响非常小。因此,在设计中可以考虑加大 α_-+的角度以降低天线罩在以静强度为失效模式下的失效概率。而针对 α_-−则可以减少对其可靠性方面的考量,更多地从其他设计角度进行分析。

表 3　算例 2 中不同方法得到的失效概率函数极值及其平均相对误差

方法	$\hat{P}_f$	P_f	$\bar{\varepsilon}$	N
DMCS	0.001 02 (0.031 3)	1.93×10^{-4} (0.039 5)	0	121×10^6
PRA	0.001 11 (0.073 8)	1.977×10^{-4} (0.095 5)	2.89%	10^6
ASI-SS	0.000 93 (0.0812)	2.004×10^{-4} (0.083 4)	4.53%	8.4×10^4
SS-IS-PRA	0.001 0 (0.0729)	1.913×10^{-4} (0.074 9)	3.61%	6×10^4

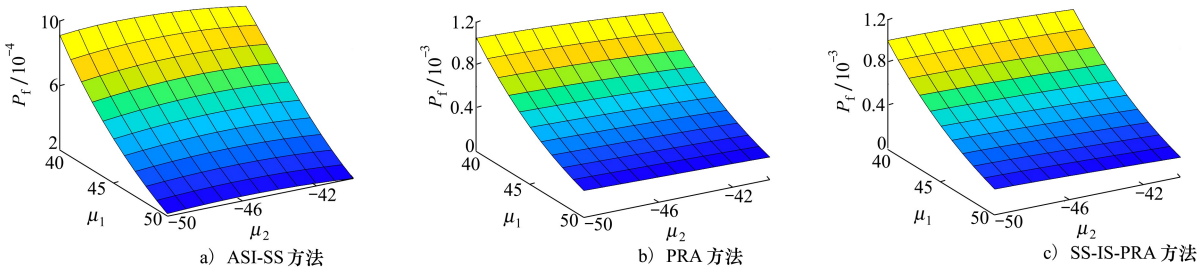


图 5　由不同方法得到的算例 3 中的失效概率函数图

4　结　论

1) 为了进一步提高失效概率函数的求解效率,本文提出了一种 SS-IS-PRA 方法,该方法借助于 PRA 和 SS-IS 的优越性,能够在保证精度的同时,大幅提高失效概率函数的求解效率。

2) 所提方法在数值算例以及飞机天线罩结构中的应用表明:无论在显示功能函数还是隐式功能函数的情况下,所提方法在求解失效概率函数方面均表现出较高的准确性和高效性。

3) 相较于传统的 PRA 方法,所提 SS-IS-PRA 方法具有相当或者更高计算精度的同时能够大幅减少失效概率函数求解的计算量。

相比于已有文献的 ASI-SS 方法,所提 SS-IS-PRA 方法由于在子集模拟过程中采用了重要抽样技术以及一种新的基于混合重要抽样的重要抽样函数构造策略,而非 MCMC 方法,能够有效避免样本间的相关性,因而在具有更好效率和精度的同时,能够显著提升算法的收敛性。

参考文献:

[1] HASOFER A M, LIND N C. An exact and invariant first order reliability format[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1974, 100(1): 111-121

[2] KIUREGHIAN A D, DESTEFANO M. Efficient algorithm for 2nd-order reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1991, 117(12): 2904-2923

[3] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263-277

[4] AU S K, BECK J L. Important sampling in high dimensions[J]. Structural Safety, 2003, 25(2): 139-163

[5] PRADLWARTER H J, SCHUELLER G I, KOUTSOURELAKIS P S, et al. Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems[J]. Structural Safety, 2007, 29(3): 208-221

[6] DITLEVSEN O, OLESEN R, MOHR G. Solution of a class of load combination problems by directional simulation[J]. Structural Safety, 1986, 4(2): 95-109

[7] AU S K, BECK J L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations[J]. Structural Safety, 1999, 21(2): 135-158

[8] PAPAIOANNOU I, PAPADIMITRIOU C, STRAUB D. Sequential importance sampling for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2016, 62: 66-75

[9] DUBOURG V, SUDRET B, DEHEEGER F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 33: 47-57

[10] 宋述芳, 吕震宙. 基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法[J]. 力学学报, 2008, 40(5): 654-662
SONG Shufang, LYU Zhenzhou. Reliability sensitivity analysis based on subset simulation and importance sampling[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanic, 2008, 40(5): 654-662 (in Chinese)

[11] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154

[12] FAURIAT W, GAYTON N. AK-SYS: an adaptation of the AK-MCS method for system reliability[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 123: 137-144

[13] DUBOURG V, SUDRET B, DEHEEGER F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 33: 47-57

[14] 韦新鹏, 姚中洋, 宝文礼, 等. 一种基于主动学习克里金模型的证据理论可靠性分析方法[J]. 机械工程学报, 2024, 60(2): 356-368
WEI Xinpeng, YAO Zhongyang, BAO Wenli, et al. Evidence-theory-based reliability analysis method using active-learning Kriging model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(2): 356-368 (in Chinese)

[15] ZHU X, LU Z, YUN W. An efficient method for estimating failure probability of the structure with multiple implicit failure domains by combining Meta-IS with IS-AK[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2020, 193: 106644

[16] 周策, 白斌, 叶楠. 自适应粒子群优化支持向量回归的工程系统可靠性预测[J]. 机械工程学报, 2023, 59(14): 328-338
ZHOU Ce, BAI Bin, YE Nan. Reliability prediction of engineering system based on adaptive particle swarm optimization support vector regression[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(14): 328-338 (in Chinese)

[17] 胡伟飞, 廖家乐, 郭云飞, 等. 基于物理信息神经网络的时变可靠性分析方法[J]. 机械工程学报, 2024, 60(13): 141-153
HU Weifei, LIAO Jiale, GUO Yunfei, et al. Time-dependent reliability analysis based on physics-informed neutral network[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(13): 141-153 (in Chinese)

[18] GASSER M, SCHUËLLER G I. Reliability-based optimization of structural systems[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1997, 46: 287-307

[19] JENSEN H A. Structural optimization of linear dynamical systems under stochastic excitation: a moving reliability database approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(12/13/14/15/16): 1757-1778

[20] 凌春燕, 吕震宙, 员婉莹. 失效概率函数求解的高效算法[J]. 国防科技大学学报, 2018, 40(3): 159-167
LING Chunyan, LYU Zhenzhou, YUAN Wanying. Efficient method for failure probability function[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2018, 40(3): 159-167 (in Chinese)

[21] AU S K. Reliability-based design sensitivity by efficient simulation[J]. Computers and Structures, 2005, 83(14): 1048-1061

[22] CHING J, HSIEH Y H. Local estimation of failure probability function and its confidence interval with maximum entropy principle[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2007, 22(1): 39-49

[23] YUAN X, LIU S, VALDEBENITO M A, et al. Efficient procedure for failure probability function estimation in augmented space [J]. Structural Safety, 2021, 92: 102104

[24] NIKOLAIDIS E, SALEEM S. Probabilistic reanalysis using Monte Carlo simulation[J]. SAE International Journal of Materials and Manufacturing, 2009, 1(1): 22-35

[25] LI L, LU Z. A new algorithm for importance analysis of the inputs with distribution parameter uncertainty[J]. International Jour-

nal of Systems Science, 2016, 47(13): 3065-3077

[26] 陈志远, 李璐祎. 参数不确定性下高效的可靠性灵敏度分析方法[J]. 航空学报, 2022, 43(9): 1-20
CHEN Zhiyuan, LI Luyi. Efficient methods for reliability sensitivity analysis of the inputs with distribution parameter uncertainty [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2022, 43(9): 1-20 (in Chinese)

[27] YUAN X. Local estimation of failure probability function by weighted approach[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 34: 1-11

[28] WEI P, LU Z, SONG J. Extended Monte Carlo simulation for parametric global sensitivity analysis and optimization[J]. AIAA Journal, 2014, 52(4): 867-878

[29] ZHOU C, LI C, ZHANG H, et al. Reliability and sensitivity analysis of composite structures by an adaptive Kriging based approach[J]. Composite Structures, 2021, 278: 114682

A new efficient method for estimating failure probability function

WANG Hao[1], LI Luyi[1,2,3], LIU Junchao[1], YUAN Xiukai[4]

(1.School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2.National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Mianyang 621900, China;
3.National Key Laboratory of Aircraft Configuration Design, Xi'an 710072, China;
4.School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Estimation of the failure probability function plays a crucial role in reliability-based optimization design. However, efficiently and accurately estimating the failure probability function remains a challenge. Compared to the traditional double-loop Monte Carlo simulation (DMCS) method, the single-loop probabilistic reanalysis (PRA) method can alleviate the computational dependence of the failure probability function on the distribution parameters of input variables. Nevertheless, for problems involving small failure probabilities, the computational cost of PRA is still impractical for engineering applications. Therefore, to further improve the computational efficiency of the failure probability function, this paper combines importance sampling-based subset simulation (SS-IS) with the PRA method, and proposes a novel SS-IS-based PRA (SS-IS-PRA) method. The proposed method transforms the final small failure probability function into a product of a series of larger conditional failure probability functions and then estimates all conditional failure probability functions simultaneously with a set of input-output samples by virtue of the advantages of the PAR method. Furthermore, considering that the design points under different distribution parameters are normally different, a new strategy for constructing the importance sampling density function in the SS-IS-PAR method is proposed based on the idea of mixed importance sampling. Finally, two examples verify the effectiveness and efficiency of the proposed SS-IS-PRA method.

Keywords: structural reliability analysis; failure probability function; probabilistic reanalysis; subset simulation; importance sampling

引用格式: *汪昊, 李璐祎, 刘俊超, 等. 一种新的失效概率函数高效求解方法[J]. 西北工业大学学报, 2025, 43(5): 869-877*
WANG Hao, LI Luyi, LIU Junchao, et al. A new efficient method for estimating failure probability function[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2025, 43(5): 869-877 (in Chinese)