

行星滚柱丝杠不完整齿轮副啮合特性分析

卜晓琨, 付晓军, 徐烨, 李欣, 马尚君

(西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

摘要:根据滚柱螺纹方程、直齿齿廓方程与坐标变换关系,建立行星滚柱丝杠中不完整齿轮副曲面方程。基于齿轮啮合原理与不完整齿轮副曲面方程,求解不完整齿轮副的接触点位置与接触线长度。建立不完整齿轮副的有限元模型,验证了不完整齿轮副啮合模型的正确性。分析行星滚柱丝杠不完整齿轮副的啮合特性,结果表明:不完整齿轮副在同一啮合半径下,各直齿结构上接触线长度的最大值与最小值不受滚柱直齿齿廓起始角度与滚柱直齿螺纹起始角度的影响;当不完整齿轮副齿宽为滚柱螺纹导程的整数倍时,同一啮合半径下,任一直齿结构上的接触线长度均相同。

关键词:行星滚柱丝杠;不完整齿轮副;啮合特性;接触线长度

中图分类号:TH132.1

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2025)06-1192-09

行星滚柱丝杠(planetary roller screw mechanism, PRSM)是一种通过螺纹啮合将旋转运动转换为直线运动的机械传动装置。与滚珠丝杠机构相比,PRSM的接触方式更为均匀,相同体积内的接触点更多,因此具有承载能力大、效率高、寿命长等特点,目前已被广泛应用于数控机床、工业机器人、航空航天等领域。根据主动件的不同,可以将PRSM分为标准式PRSM和反向式PRSM,标准式PRSM以丝杠的旋转运动作为输入,以螺母的直线运动作为输出;反向式PRSM以长螺母的旋转运动作为输入,以中空丝杠的直线运动作为输出。

啮合特性研究是进行PRSM传动精度与动态响应分析的基础,亦是其齿形优化设计、摩擦磨损调控和润滑寿命预估等的前提。在PRSM螺纹副啮合特性研究中,国内外针对啮合接触位置与轴向间隙的计算模型主要分为数值啮合和解析啮合2类。数值模型方面,Blinov、Ryakhovskiy及Fedosovsky等^[1-3]通过离散化方法构建了典型解决方案:在螺纹重叠区域建立高密度网格系统,将滚柱与丝杠/螺母的曲

面啮合问题转化为网格节点处的空间坐标差值计算,实现了复杂接触问题的数值表征。解析模型研究则基于微分几何原理展开,付晓军与Jones等^[4-5]通过建立曲面相切接触条件的数学模型,推导出行星滚柱丝杠副的啮合方程解析式。该模型通过参数化方法实现轴向间隙的精确计算,为系统设计提供了理论闭环解。

受PRSM的特殊传动结构与加工工艺限制,滚柱两端齿轮因螺纹切割导致其齿轮结构不完整,造成滚柱两端齿轮与内齿圈或丝杠之间轴向非连续啮合,形成不完整齿轮副。不完整齿轮副的作用是约束滚柱的轴向和旋转自由度,实现运动同步、载荷均布及传动精度控制,从而增强PRSM的系统稳定性和可靠性。针对PRSM不完整齿轮副的研究,国内外学者主要围绕参数与工艺优化、动态特性分析等方向开展相关研究。

在参数与工艺优化领域,韦振兴等^[6]通过引入乘法与模拟退火算法的混合策略,实现了参数全局优化。Zavyalov等^[7]开发了基于轮廓仪测量与数学建模的PRSM不完整齿轮副标准化参数体系,在保证质量控制的同时,将其螺纹几何参数的检测效率提升45%。在动态特性研究领域,马尚君等^[8]揭示了滚柱螺纹节圆与滚柱直齿节圆偏移对PRSM运动参数的动态影响;Jones等^[9]阐明了节圆不匹配导致的滚柱轴向迁移现象及其对系统导程的边界约

收稿日期:2025-03-12

基金项目:国家重点研发计划(2023YFB3406400)、国家自然科学基金面上项目(52575074)与陕西省一般项目-面上项目(2025JC-YBMS-352)资助

作者简介:卜晓琨(2003—),硕士研究生

通信作者:付晓军(1987—),副教授 e-mail:fuxiaojun@nwpu.edu.cn

束;Xing 等^[10]基于节圆误差模型分析了齿轮副啮合滑动速度的方向和大小变化规律。Fu 等^[11-13]则在动态建模方向取得突破,通过六自由度非线性模型量化了接触力、压力角、摩擦-润滑耦合的非线性效应,并构建含误差的啮合运动学框架,为载荷分布与误差传递研究提供理论工具。许千斤等^[14]聚焦齿轮副啮合激励与惯性力的耦合作用,提出其对螺纹副动载荷分布的调控机制;马腾龙等^[15]则深入研究螺纹副-齿轮副同步啮合机制,解析转速、负载对接触载荷波动特性的影响。

现有国内外研究均表明 PRSM 中的齿轮副啮合状态会对其运动及动态承载特性产生重要影响,但缺乏考虑螺纹与直齿结构耦合的 PRSM 不完整齿轮副啮合模型,无法高效准确地对其啮合特性进行分析。因此,本文通过研究标准式 PRSM 与反向式 PRSM 中的不完整齿轮副,给出不完整齿轮副的曲面方程,分析滚柱直齿螺纹起始角度、齿廓起始角度与不完整齿轮副齿宽对接触线长度的影响,为 PRSM 螺纹副-齿轮副耦合承载及振动分析提供理论基础。

1 PRSM 不完整齿轮副结构

1.1 内啮合与外啮合不完整齿轮副

标准式 PRSM 中,滚柱端部的直齿结构需同时与丝杠螺纹和安装在螺母端部的内齿圈相匹配,如图 1 所示,滚柱直齿和内齿圈共同组成一对内啮合不完整齿轮副。 $O^1-X^1Y^1Z^1$ 和 $o_R^1-x_R^1y_R^1z_R^1$ 分别为内啮合固定坐标系与滚柱坐标系, Z^1 轴和 z_R^1 轴均与滚柱轴线重合,且 $o_R^1-x_R^1y_R^1z_R^1$ 随滚柱旋转。 $o_{Rg}^1-x_{Rg}^1y_{Rg}^1z_{Rg}^1$ 为内齿圈坐标系, z_{Rg}^1 轴与内齿圈轴线重合,且原点 o_{Rg}^1 和 o_R^1 的连线与 x_{Rg}^1 轴相重合。

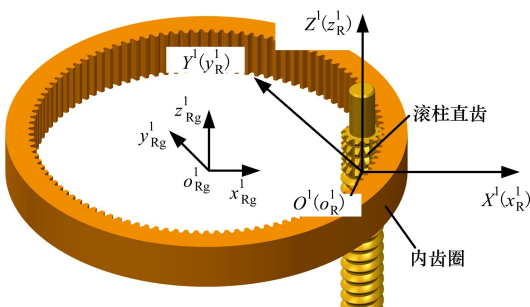


图 1 内啮合不完整齿轮副坐标系

反向式 PRSM 中,滚柱端部的直齿结构需同时与螺母螺纹和安装在丝杠端部的外齿圈相匹配,如图 2 所示,滚柱直齿和外齿圈共同组成一对外啮合不完整齿轮副。采用与标准式 PRSM 类似的方式,在图 2 中建立外啮合固定坐标系 $O^2-X^2Y^2Z^2$ 、滚柱坐标系 $o_R^2-x_R^2y_R^2z_R^2$ 和外齿圈坐标系 $o_{Wt}^2-x_{Wt}^2y_{Wt}^2z_{Wt}^2$ 。

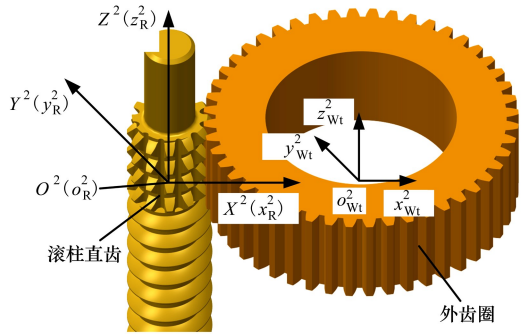


图 2 外啮合不完整齿轮副坐标系

由图 1 ~ 2 可得滚柱坐标系 $o_R^i-x_R^iy_R^iz_R^i$ ($i=1,2$) 向固定坐标系 $O^i-X^iY^iZ^i$ 的坐标变换为:

$$\begin{bmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \\ 1 \end{bmatrix} = T_R^i \cdot \begin{bmatrix} x_R^i \\ y_R^i \\ z_R^i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$T_R^i = \begin{bmatrix} \cos\varphi^i & -\sin\varphi^i & 0 & 0 \\ \sin\varphi^i & \cos\varphi^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: φ^i 为滚柱坐标系 $o_R^i-x_R^iy_R^iz_R^i$ 相对于固定坐标系 $O^i-X^iY^iZ^i$ 在 Z^i 轴周向的旋转角度。

内齿圈坐标系 $o_{Rg}^1-x_{Rg}^1y_{Rg}^1z_{Rg}^1$ 向内啮合固定坐标系 $O^1-X^1Y^1Z^1$ 的坐标变换为:

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ Z^1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{Rg}^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{Rg}^1 \\ y_{Rg}^1 \\ z_{Rg}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$T_{Rg}^1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi^1}{Z_R^1/Z_{Rg}^1}\right) & -\sin\left(\frac{\varphi^1}{Z_R^1/Z_{Rg}^1}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\varphi^1}{Z_R^1/Z_{Rg}^1}\right) & \cos\left(\frac{\varphi^1}{Z_R^1/Z_{Rg}^1}\right) & 0 & -a_R^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: Z_R^1 和 Z_{Rg}^1 分别为滚柱直齿与内齿圈的齿数; a_R^1 为内啮合不完整齿轮副的中心距。

外齿圈坐标系 $o_{Wt}^2-x_{Wt}^2y_{Wt}^2z_{Wt}^2$ 向外啮合固定坐标系 $O^2-X^2Y^2Z^2$ 的坐标变换为:

$$\begin{bmatrix} X^2 \\ Y^2 \\ Z^2 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{Wt}^2 \cdot \begin{bmatrix} x_{Wt}^2 \\ y_{Wt}^2 \\ z_{Wt}^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_{Wt}^2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi^2}{Z_R^2/Z_{Wt}^2}\right) & \sin\left(\frac{\varphi^2}{Z_R^2/Z_{Wt}^2}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\varphi^2}{Z_R^2/Z_{Wt}^2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi^2}{Z_R^2/Z_{Wt}^2}\right) & 0 & a_R^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: Z_{Wt}^2 为外齿圈的齿数; a_R^2 为内啮合不完整齿轮副的中心距。

1.2 滚柱不完整直齿结构

如图 3 所示, 滚柱直齿同时具有螺纹和直齿结构。因为滚柱直齿结构仅会出现在如图 3 蓝色虚线所围的螺纹结构上, 所以区别于传统直齿轮, 滚柱直齿沿着 z_R^i 轴方向结构并不完整, 是由多个既有齿轮特征又有螺纹特征的齿牙所构成。

假设图 3 所示滚柱直齿的齿数为 Z_R^i , 定义沿着轴线方向, 被图 3 红色虚线椭圆所圈入结构为 1 个滚柱直齿结构, 则滚柱直齿 j_R^i 为沿顺时针方向靠近 x_R^i 正半轴的第 j_R^i 个直齿结构, 且 $j_R^i = 1, 2, \dots, Z_R^i$ 。如图 3 所示, 滚柱直齿 j_R^i 共由 $N_{j_R^i}$ 段非连续齿牙所构成, 则滚柱齿牙 $j_R^i \times q$ 为直齿结构 j_R^i 上沿 z_R^i 轴方向靠近 $x_R^i o_R^i y_R^i$ 平面的第 q 个齿牙, 且 $(q = 1, 2, \dots, N_{j_R^i})$ 。

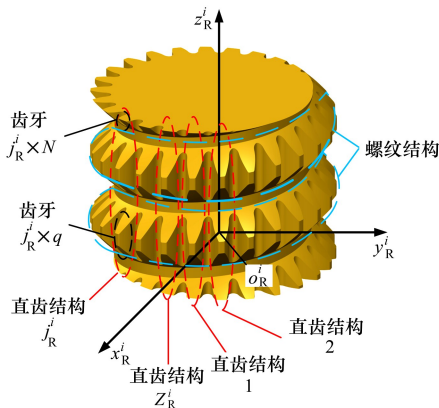


图 3 滚柱直齿结构组成

滚柱不完整直齿中, 螺纹结构与齿轮结构的相位关系定义如图 4 所示。图 4 中, r_R^i 是直齿结构的分度圆半径; 曲线 Γ_R^i 为直齿结构 1 靠近 x_R^i 正半轴的一侧齿面在 $x_R^i o_R^i y_R^i$ 平面上的投影, 并定义 φ_{R0}^i 为曲线 Γ_R^i 在零件坐标系 $o_R^i-x_R^i y_R^i z_R^i$ 中的起始角度, $\varphi_{R0}^i \in [0, 2\pi/Z_R^i]$; B^i 为滚柱直齿的齿宽; $o_s^i-u_s^i w_s^i v_s^i (i = 1, 2)$ 为滚柱直齿螺纹结构截面坐标系, r^i 为滚柱螺纹的名义半径; λ^i 为滚柱螺纹的螺旋升角; 曲线 Γ_T^i 为半径 r^i 、螺旋升角 λ^i 的圆柱螺旋线, 曲线 Γ_{Te}^i 为曲线 Γ_T^i 向 z_R^i 负半轴延伸的圆柱螺旋线; 截面坐标系的原点 o_s^i 在曲线 Γ_T^i 或 Γ_{Te}^i 上, w_s^i 轴与 z_R^i 轴平行, 平面 $u_s^i o_s^i w_s^i$ 通过 z_R^i 轴; θ_0^i 为曲线 Γ_T^i 在坐标系 $o_R^i-x_R^i y_R^i z_R^i$ 中的起始角度; θ^i 为点 o_s^i 与曲线 Γ_T^i 起始点在平面 $x_R^i o_R^i y_R^i$ 上关于点 o_R^i 的夹角。

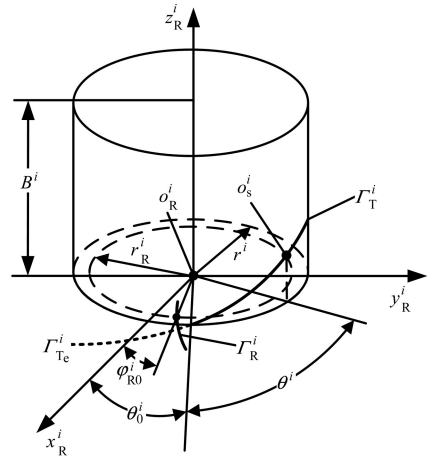


图 4 滚柱直齿零件坐标系

2 不完整齿轮副曲面方程

根据螺旋曲面的参数表示方法^[16], 由坐标变换关系得滚柱直齿中螺旋结构的螺旋曲面方程为

$$\begin{aligned} r_{R1}^i(u^i, \theta^i) = & \\ & (u^i + r^i) \cos(\theta^i + \theta_0^i) \\ & (u^i + r^i) \sin(\theta^i + \theta_0^i) \\ & \xi_{R1}^i (w_{Ts}^i + \sqrt{(r_{Ts}^i)^2 - (u^i + r_{Ts}^i \sin \beta^i)^2}) + \frac{\theta^i L_R^i}{2\pi} - L_R^i \end{aligned} \quad (7)$$

式中: 上标 $i = 1, 2$ 分别代表内啮合和外啮合; u^i 和 θ^i 代表滚柱直齿中螺旋结构的螺旋曲面方程在其零件坐标系中的曲面坐标, 其中 $u^i \in [a_i, b_i]$; ξ_{R1}^i 取 1 或

- 1 代表滚柱螺旋结构的上或下螺旋曲面。由(7)式与渐开线齿面角度关系得滚柱直齿、内齿圈和外齿圈在各自坐标系中的统一直齿齿廓方程为

$$\mathbf{r}_k^i(\alpha_k^i) = \begin{bmatrix} \frac{r_{bk}^i}{\cos\alpha_k^i} \cos\left\{\varphi_{k0}^i + \frac{\pi}{Z_k^i} \left(2j_k^i + \frac{1}{2}\right) + \xi_{k2}^i \cdot g_k^i(\alpha_k^i)\right\} \\ \frac{r_{bk}^i}{\cos\alpha_k^i} \sin\left\{\varphi_{k0}^i + \frac{\pi}{Z_k^i} \left(2j_k^i + \frac{1}{2}\right) + \xi_{k2}^i \cdot g_k^i(\alpha_k^i)\right\} \\ t_k^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$g_k^i(\alpha_k^i) = \tan\alpha_k^i - \alpha_k^i - \frac{\varphi_{k0}^i}{2} - \varphi_{1k}^i \quad (9)$$

式中:下标 k 取 R, Rg 和 Wt 分别代表滚柱直齿、内齿圈与外齿圈; j_k^i 为直齿齿廓中第 j_k^i 个直齿结构, $j_k^i \in (0, 1, \dots, Z_k^i)$; ξ_{k2}^i 取 1 或 -1 代表前或后渐开线齿面; r_k^i 为渐开线上一点的向径; θ_k^i 为渐开线上该点与基圆法线之间的展角; α_k^i 为渐开线在该点的压力角; r_{bk}^i 为基圆半径; φ_{k0}^i 为齿厚关于圆心的夹角,其值为 π/Z_k^i ; φ_{1k}^i 为两侧渐开线在分度圆上点与基圆法线关于圆心的夹角; α_k^i 为齿廓渐开线在该点的压力角。 α_k^i 的取值范围为

$$\alpha_k^i \in \left[\arccos\left(\frac{r_{bk}^i}{r_{fk}^i}\right), \arccos\left(\frac{r_{bk}^i}{r_{ak}^i}\right) \right] \quad (10)$$

式中: φ_{k0}^i 是直齿齿廓在零件坐标系中的起始角度,其中 φ_{Rg0}^1 和 φ_{Wt0}^2 分别为当 $\varphi^i = 0$ 时,内齿圈和外齿圈与滚柱直齿相啮合直齿齿廓在各自零件坐标系中的初始角度。 φ_{Rg0}^1 和 φ_{Wt0}^2 的值分别为

$$\varphi_{Rg0}^1 = \frac{Z_R^1}{Z_{Rg}^1} \varphi_{R0}^1 \quad (11)$$

$$\varphi_{Wt0}^2 = -\frac{Z_R^2}{Z_{Wt}^2} \varphi_{R0}^2 + \pi \quad (12)$$

(8)式中, t_k^i 为滚柱直齿、内齿圈和外齿圈的 z_k^i 轴坐标。根据内齿圈与外齿圈的结构特征可知 t_k^i (k 取 Rg, Wt) 可在 $0 \sim B^i$ 之间任意取值, B^i 为不完整齿轮副的齿宽;由于螺纹结构的存在,滚柱直齿齿廓形状并不是连续的齿面, t_{Rk}^i 的取值范围为

$$t_{Rk}^i \in [0, B_R^i] \cap S^i \quad (13)$$

$$S^i = \begin{cases} R, & \frac{r_{bR}^i}{\cos\alpha_R^i} < r^i - b^i \\ U^i, & \frac{r_{bR}^i}{\cos\alpha_R^i} \geq r^i - b^i \end{cases} \quad (14)$$

$$U^i = \cup [-f^i(u_{Rk}^i) + h^i(\theta_{Rk}^i), f^i(u_{Rk}^i) + h^i(\theta_{Rk}^i)] \quad (15)$$

$$f^i(u_{Rk}^i) = w_{Ts}^i + \sqrt{(r_{Ts}^i)^2 - (u_{Rk}^i + r_{Ts}^i \sin\beta^i)^2} \quad (16)$$

$$h^i(\theta_{Rk}^i) = \frac{(\theta_{Rk}^i - \theta_0^i)L_{Rk}^i}{2\pi} - L_{Rk}^i \quad (17)$$

由坐标变换关系与(8)式得滚柱直齿、内齿圈和外齿圈在固定坐标系中的曲面方程为

$$\mathbf{r}_{km}^i(\alpha_k^i, \varphi^i) = \mathbf{T}_k^i \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^i(\alpha_k^i) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

3 不完整齿轮副啮合模型

3.1 接触点位置

如图 5 所示,不完整齿轮副在滚柱直齿上的接触线并不连续,但同一直齿上的线段具有相同的 $X^i O^i Y^i$ 平面投影点,记作不完整齿轮副的接触点。如图 8 所示,该接触点在固定坐标系 $O^i - X^i Y^i Z^i$ 与对应零件坐标系中的位置为 $P_j^i(x_j^i, y_j^i)$ 和 $P_{kj}^i(x_{kj}^i, y_{kj}^i)$ 。定义投影点与原点 O^i 的距离为啮合半径 r_{mRj}^i , 则

$$r_{mRj}^i = \sqrt{(x_j^i)^2 + (y_j^i)^2} \quad (19)$$

式中,下标 j 表示接触点位于直齿结构 j_{Rk}^i 在 $X^i O^i Y^i$ 平面上的投影上。

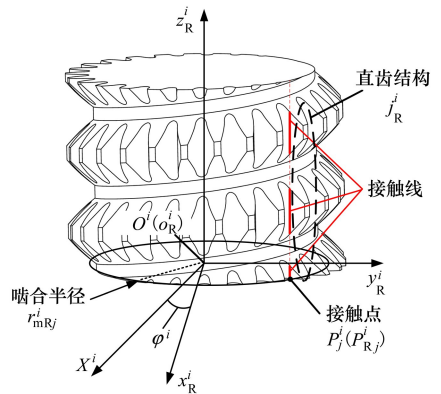


图 5 不完整齿轮副接触点位置

PRSM 内啮合与外啮合不完整齿轮副的统一基圆公切线方程为

$$y^i = \xi_u^i (c_R^i x^i - d_R^i) \quad (20)$$

式中, $\xi_u^i = 1$ 和 -1 分别代表不完整齿轮副的逆时针啮合和顺时针啮合, 即当 $\xi_u^i = 1$ 时, $\varphi^i > 0$; 当 $\xi_u^i = -1$ 时, $\varphi^i < 0$; c_R^i 和 d_R^i 取值分别为

$$\begin{cases} c_R^i = \frac{r_{bk}^i - \xi_m^i r_{bR}^i}{\sqrt{(a_R^i)^2 - (r_{bk}^i - \xi_m^i r_{bR}^i)^2}} \\ d_R^i = \frac{a^i \cdot r_{bR}^i}{\sqrt{(a_R^i)^2 - (r_{bk}^i - \xi_m^i r_{bR}^i)^2}} \end{cases} \quad (21)$$

式中,当 $i = 1$ 时, $\xi_m^i = 1, k$ 取 Rg; 当 $i = 2$ 时, $\xi_m^i = -1, k$ 取 Wt。

根据齿轮啮合原理,联立(18)和(21)式得

$$[r_{km}^i(\alpha_k^i, \varphi^i)]_y = \xi_u^i (c_R^i \cdot [r_{km}^i(\alpha_k^i, \varphi^i)]_x - d_R^i) \quad (22)$$

式中: $[\cdot]_x$ 和 $[\cdot]_y$ 分别代表向量的 X^i 坐标与 Y^i 坐标。求解(22)式可得不完整齿轮副的接触点在固定坐标系下的坐标 $P_j^i(x_j^i, y_j^i)$ 。

3.2 接触线长度

如图 6 所示,不完整齿轮副的接触线被分割成多条不连续的线段,此时不完整齿轮副的接触线长度为各个齿牙上的接触线长度之和。图 6 中, h_{qj}^i 为齿牙 $j_R \times q$ 上的接触线, t_{qju}^i 和 t_{qjb}^i 分别为接触线 h_{qj}^i 上端点和下端点的 z_R^i 轴坐标。则 h_{qj}^i 值为

$$h_{qj}^i = t_{qju}^i - t_{qjb}^i \quad (23)$$

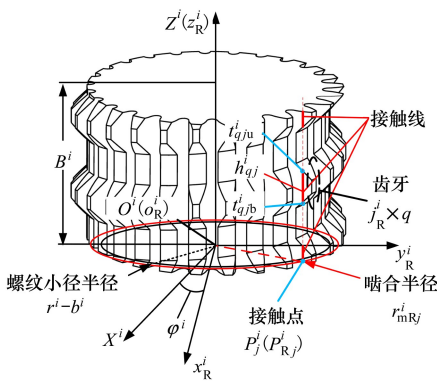


图 6 不完整齿轮副接触线长度

由图 6 得 t_{qju}^i 和 t_{qjb}^i 的值为

$$\begin{cases} t_{qju}^i = \max \{ \min \{ f^i(u_{qj}^i) + h^i(\theta_{qj}^i) + (q-1)L_R^i, B^i \}, 0 \} \\ t_{qjb}^i = \min \{ \max \{ -f^i(u_{qj}^i) + h^i(\theta_{qj}^i) + (q-1)L_R^i, 0 \}, B^i \} \end{cases} \quad (24)$$

式中, u_{qj}^i 和 θ_{qj}^i 为接触点在滚柱坐标系上的曲面坐标,其值为

$$u_{qj}^i = \sqrt{(x_{Rj}^i)^2 + (y_{Rj}^i)^2} - r^i \quad (25)$$

$$\theta_{qj}^i = \theta^i(x_{Rj}^i, y_{Rj}^i) \quad (26)$$

$$\theta^i(x_{Rj}^i, y_{Rj}^i) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_{Rj}^i}{x_{Rj}^i}\right), & x_{Rj}^i > 0 \ \& \ y_{Rj}^i > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x_{Rj}^i = 0 \ \& \ y_{Rj}^i > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y_{Rj}^i}{x_{Rj}^i}\right), & x_{Rj}^i < 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x_{Rj}^i = 0 \ \& \ y_{Rj}^i < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y_{Rj}^i}{x_{Rj}^i}\right), & x_{Rj}^i > 0 \ \& \ y_{Rj}^i < 0 \end{cases} \quad (27)$$

式中,滚柱坐标系 $o_R^i-x_R^i y_R^i z_R^i$ 下的接触点坐标 $P_{Rj}^i(x_{Rj}^i, y_{Rj}^i)$ 的求法为

$$\begin{bmatrix} x_{Rj}^i \\ y_{Rj}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi^i & -\sin\varphi^i \\ \sin\varphi^i & \cos\varphi^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_j^i \\ y_j^i \end{bmatrix} \quad (28)$$

由图 6 和(24)~(28)式得到不完整齿轮副在直齿结构 J_R^i 上的接触线长度 L_j^i 值为

$$L_j^i = \sum_{q=1} h_{qj}^i \quad (29)$$

4 模型验证

根据表 1 提供的结构参数,建立如图 7 所示的不完整齿轮副的有限元模型,滚柱直齿、内齿圈与外齿圈的弹性模量和泊松比分别为 210 GPa 和 0.3。

表 1 不完整齿轮副结构参数

参数	滚柱直齿	内齿圈	外齿圈
	R	Rg	Wt
齿数 Z_k^i	26	130	78
模数 m^i	0.25	0.25	0.25
齿顶高系数 h_a^*	1	1	1
顶隙系数 c^*	0.35	0.35	0.35
压力角 $\alpha/(\circ)$	20	20	20
齿宽 B^i/mm	4	4	4
齿廓起始角度 $\varphi_{k0}^i/(\circ)$	$\frac{135}{26}$	$\frac{135}{130}$	$180 - \frac{135}{78}$
螺纹起始角度 $\theta_0^i/(\circ)$	0		
名义半径 r^i/mm	3.25		
牙顶高 a^i/mm	0.27		
牙底高 b^i/mm	0.44		
半牙厚 c^i/mm	0.45		
牙侧角 $\beta^i/(\circ)$	45		
导程 L_R^i/mm	2		
滚柱轮廓半径 r_{ts}^i/mm	4.596		

对于内啮合不完整齿轮副有限元模型,如图 7a)所示,在滚柱直齿轴的周向方向施加旋转角度 $\varphi^1 = -0.12 \text{ rad}$,分成 3 个增量步完成,并约束 z_R^1 轴的其余自由度;向内齿圈 z_{Rg}^1 轴的周向施加 $50 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 的扭矩,并约束 z_{Rg}^1 轴的其余自由度。对直齿结构 26 与直齿结构 1 的网格进行细化并在其内齿圈啮合侧设置 3 个接触对。

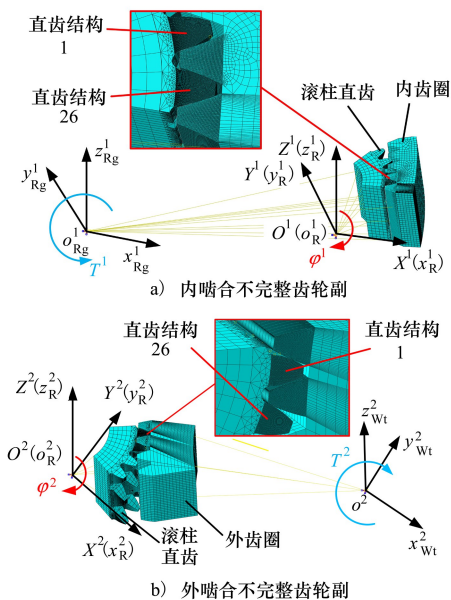


图 7 有限元模型

对于外啮合不完整齿轮副有限元模型,如图 7b)所示,在滚柱直齿 z_R^2 轴的周向方向施加旋转角度 $\varphi^2 = -0.12 \text{ rad}$,分成 3 个增量步完成,并约束 z_R^2 轴的其余自由度;向滚柱直齿 z_{Wt}^2 轴的周向施加数值

为 $-50 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 的扭矩,并约束 z_{Wt}^2 轴的其余自由度。对直齿结构 #26 与直齿结构 #1 的网格进行细化并在其外齿圈啮合侧设置 3 个接触对。通过建立不完整齿轮副的有限元模型,求得各个旋转角度下的接触应力云图,并测量得到直齿结构 26 的啮合半径与接触线长度。其中滚柱直齿旋转角度为 -0.02 rad 的接触应力云图如图 8 所示。

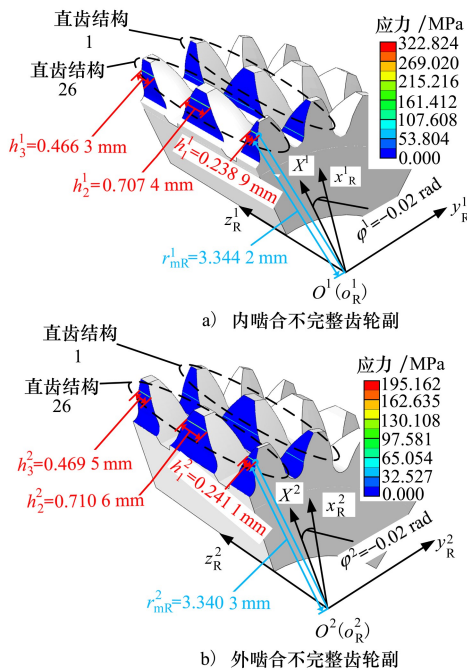


图 8 接触应力云图

表 2~3 对比了有限元模型与不完整齿轮副模型对直齿结构 26 的计算结果,分别展示了内外啮合不完整齿轮副的啮合半径与接触线长度数据。

表 2 内啮合不完整齿轮副计算结果对比

滚柱直齿旋转角度 φ_R^1/rad	有限元模型		不完整齿轮副啮合模型	
	啮合半径 r_{mR26}^1/mm	接触线长度 L_{26}^1/mm	啮合半径 r_{mR26}^1/mm	接触线长度 L_{26}^1/mm
-0.04	3.366 9	1.315 4	3.367 2(0.01%)	1.313 5(0.14%)
-0.08	3.420 7	1.078 1	3.420 5(0.007%)	1.080 2(0.20%)
-0.12	3.473 6	0.831 0	3.477 2(0.10%)	0.822 6(1.01%)

表 3 外啮合不完整齿轮副计算结果对比

滚柱直齿旋转角度 φ_R^2/rad	有限元模型		不完整齿轮副啮合模型	
	啮合半径 r_{mR26}^2/mm	接触线长度 L_{26}^2/mm	啮合半径 r_{mR26}^2/mm	接触线长度 L_{26}^2/mm
-0.04	3.363 2	1.322 3	3.367 2(0.12%)	1.313 5(0.67%)
-0.08	3.417 9	1.088 4	3.420 5(0.08%)	1.080 2(0.75%)
-0.12	3.475 2	0.827 7	3.477 2(0.06%)	0.822 6(0.61%)

注:表 2~3 括号中的百分数为不完整齿轮副啮合模型的计算结果与有限元模型计算结果的相对值。

由表 2~3 可知,不完整齿轮副啮合半径随滚柱直齿旋转角度绝对值的增大而增大,接触线长度随滚柱直齿旋转角度绝对值的增大而减小;不完整齿轮副啮合模型与有限元模型的啮合半径最大相对误差最大为 0.12%,接触线长度最大相对误差为 1.01%,在应允的误差限范围内。综上,本文所建立的不完整齿轮副啮合模型能用作计算不完整齿轮副的接触点位置与接触线长度。

5 结构参数影响分析

设不完整齿轮副顺时针啮合的啮合半径 r_{mr}^i 与滚柱直齿分度圆半径 r_R^i 相等,滚柱直齿上各直齿结构上的接触线长度为 $L_j^i(r_R^i)$ ($j = 1, 2, \dots, Z_R^i$)。

研究滚柱直齿齿廓起始角度 φ_{R0}^i 、滚柱直齿螺纹起始角度 θ_0^i 和齿宽 B^i 对 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的影响。

5.1 滚柱直齿齿廓起始角度

不完整齿轮副的齿宽 $B^i = 5 \text{ mm}$ ($i = 1, 2$),不完整齿轮副除齿宽与齿廓起始角度外均用表 1 参数。

由图 4 可知,滚柱直齿齿廓起始角度 $\varphi_{R0}^i \in [0, 2\pi/Z_R^i]$ 。则滚柱直齿齿廓起始角度从 $0 \sim 2\pi/Z_R^i$ 时,内啮合与外啮合不完整齿轮副中 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的变化如图 9 所示。

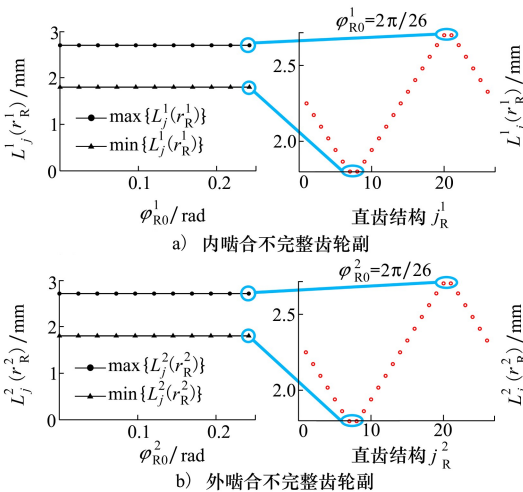


图 9 φ_{R0}^i 对 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的影响

由图 9 可知, $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 不会随着滚柱直齿齿廓起始角度变化而变化。

5.2 滚柱直齿螺纹起始角度

不完整齿轮副的齿宽 $B^i = 5 \text{ mm}$ ($i = 1, 2$),不完

整齿轮副除齿宽与螺纹起始角度以外均采用表 1 的结构参数。

滚柱直齿螺纹起始角度 $\theta_0^i \in [0, 2\pi]$,则滚柱直齿齿廓起始角度从 0 至 2π 时,内啮合与外啮合不完整齿轮副中 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的变化如图 10 所示。

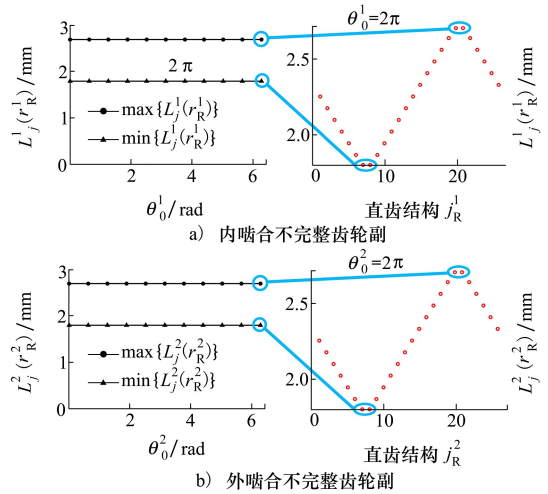


图 10 θ_0^i 对 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的影响

由图 10 可知, $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 不会随着滚柱直齿螺纹起始角度变化而变化。

当滚柱直齿齿廓起始角度 φ_{R0}^i 或滚柱直齿螺纹起始角度 θ_0^i 其中一个值保持不变时,另一个值的变化不会影响 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的值,因此滚柱直齿齿廓与滚柱直齿螺纹的相对起始角度不会对 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的值产生影响。

5.3 齿宽

不完整齿轮副除齿宽以外均采用表 1 的结构参数。当不完整齿轮副齿宽从 $2 \sim 10 \text{ mm}$ 时,内啮合与外啮合不完整齿轮副中 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的变化如图 11 所示。

由图 11 可知,当齿宽 B^i 从 $n^i L_{Rn}^i$ ($n^i \in \mathbf{N}^+$) 增加至 $(n^i + 1)L_{Rn}^i$ 的过程中, $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的值呈现先增加后不变的趋势,而 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的值呈现先不变再增加的趋势。且当不完整齿轮副齿宽为滚柱螺纹导程的整数倍时,即 $B^i = n^i L_{Rn}^i$ 时, $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 值与 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 值相等。说明当不完整齿轮副齿宽为滚柱螺纹导程的整数倍时,同一啮合半径下,任一齿结构上的接触线长度均相等。

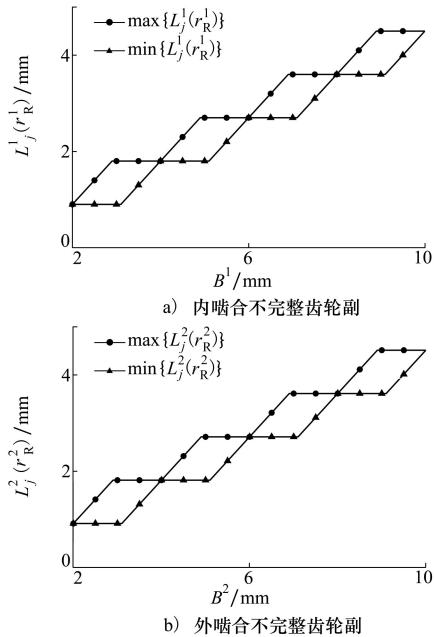


图 11 B^i 对 $\min\{L_j^i(r_R^i)\}$ 和 $\max\{L_j^i(r_R^i)\}$ 的影响

6 结 论

1) 结合滚柱螺纹方程、渐开线方程与坐标变换关系,建立了 PRSM 内啮合和外啮合不完整齿轮副在固定坐标系下的曲面方程;结合不完整齿轮副的曲面方程与齿轮啮合原理,求解出不完整齿轮副的接触点位置和接触线长度。

2) 不完整齿轮副在同一啮合半径 r_{mR}^i 下,各直齿结构上的接触线长度的最大值 $\max\{L_j^i(r_{mR}^i)\}$ 与最小值 $\min\{L_j^i(r_{mR}^i)\}$ 不受滚柱直齿齿廓起始角度 φ_{R0}^i 与滚柱直齿螺纹起始角度 θ_0^i 的影响。

3) 当不完整齿轮副齿宽 B^i 为滚柱螺纹导程 L_R^i 的整数倍时,同一啮合半径下,任一直齿结构上的接触线长度均相同。在 PRSM 不完整齿轮副的设计中,建议将不完整齿轮副齿宽 B^i 设计为滚柱螺纹导程 L_R^i 的整数倍。

参考文献:

- [1] BLINOV D S, RYAKHOVSKY O A, SOKOLOV P A. Numerical method of determining the point of initial thread contact of two screws with parallel axes and different thread inclinations[J]. Scientific Journal of Murmansk State Technical University, 1996 (3): 93-97
- [2] RYAKHOVSKIY O A, SOROKIN F D, MAROKHIN A S. Calculation of radial displacements of nut and rollers axes and the position of a contact between the nut and the roller thread in an inverted planetary roller screw mechanism[J]. Proceedings of Higher Educational Institutions, Machine Building, 2013(11): 12-19
- [3] FEDOSOVSKY M E, ALEKSANIN S A, PUCTOZEROV R V. Use of numerical method for determination of contact points position in roller screw threads[J]. Biosciences Biotechnology Research Asia, 2015, 12(1): 721-730
- [4] 付晓军. 行星滚柱丝杠副啮合与运动特性的理论及实验研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2018
FU Xiaojun. Theoretical and experimental study on meshing and kinematic characteristics of planetary roller screw pair[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2018 (in Chinese)
- [5] JONES M H, VELINSKY S A. Contact kinematics in the roller screw mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(5): 051003
- [6] 韦振兴, 杨家军, 朱继生, 等. 行星滚柱丝杠副的结构参数优化分析[J]. 机械传动, 2011, 35(6): 44-47
WEI Zhenxing, YANG Jiajun, ZHU Jisheng, et al. Optimized analysis on structural parameter for planetary roller screw[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2011, 35(6): 44-47 (in Chinese)
- [7] ZAVYALOV V S, FEDOSOVSKY M E, MALTSEVA N K, et al. Standardization and control of thread parameters of a roller-screw gear[J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2021, 1064(1): 012046
- [8] 马尚君, 刘更, 佟瑞庭, 等. 考虑滚柱节圆偏移的反向式行星滚柱丝杠副运动学分析[J]. 中国机械工程, 2014, 25(11): 1421-1426
MA Shangjun, LIU Geng, TONG Ruiting, et al. Kinematic analysis of an inverted planetary roller screw considering roller pitch circle mismatch[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 25(11): 1421-1426 (in Chinese)
- [9] JONES M H, VELINSKY S A. Kinematics of roller migration in the planetary roller screw mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2012, 134(6): 061006
- [10] XING M C, ZHANG B H, DENG P, et al. A comprehensive analysis of contact kinematics for planetary roller screw mechanism[J]. Tribology International, 2023, 179: 108127
- [11] FU X J, LIU G, TONG R T, et al. A nonlinear six degrees of freedom dynamic model of planetary roller screw mechanism[J].

Mechanism and Machine Theory, 2018, 119: 22-36

- [12] FU X J, LIU G, MA S J, et al. Kinematic model of planetary roller screw mechanism with run-out and position errors[J]. Journal of Mechanical Design, 2018, 140(3): 032301
- [13] FU X J, LIU G, MA S J, et al. An efficient method for the dynamic analysis of planetary roller screw mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 150: 103851
- [14] 许千斤, 马尚君, 牛茂东, 等. 考虑齿轮副啮合激励的滚柱螺纹动载荷分布[J]. 华南理工大学学报, 2023, 51(11): 119-130
XU Qianjin, MA Shangjun, NIU Maodong, et al. Dynamic load distribution of roller thread considering gear pair meshing excitation[J]. Journal of South China University of Technology, 2023, 51(11): 119-130 (in Chinese)
- [15] 马腾龙, 马尚君, 吴林萍, 等. 行星滚柱丝杠螺纹副-齿轮副同步啮合动态接触载荷特性[J]. 西安交通大学学报, 2022, 56(10): 11-21
MA Tenglong, MA Shangjun, WU Linping, et al. Dynamic contact load characteristics of synchronesh between screw pair and gear pair in the planetary roller screw[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2022, 56(10): 11-21 (in Chinese)
- [16] 刘更, 马尚君, 付晓军. 行星滚柱丝杠传动——啮合原理[M]. 北京: 科学出版社, 2018
LIU Geng, MA Shangjun, FU Xiaojun. Planetary roller screw mechanism transmission-meshing theory[M]. Beijing: Science Press, 2018 (in Chinese)

Analysis of meshing characteristics of incomplete gear pair in planetary roller screw mechanism

BU Xiaokun, FU Xiaojun, XU Ye, LI Xin, MA Shangjun

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Based on the roller thread equation, the spur tooth profile equation, and coordinate transformation relationships, the surface equations of the incomplete gear pairs in the planetary roller screw mechanism were established. Combining the gear meshing principle with the surface equations of incomplete gear pairs, a model for calculating the contact point positions and contact line lengths of incomplete gear pairs was proposed. A finite element model for incomplete gear pair was introduced to validate the correctness of the present model. The influence of the initial angle and width of the spur gear on the meshing characteristics of incomplete gear pairs was analyzed. The results show that under the same meshing radius, the maximum and minimum contact line lengths on each spur tooth structure are not affected by the initial angles of the roller's spur tooth profile and the roller's spur thread. The analysis shows that when the tooth width of the incomplete gear pair is an integer multiple of the roller thread lead, under the same meshing radius, the contact line lengths on any spur tooth structure are identical.

Keywords: planetary roller screw mechanism (PRSM); incomplete gear pair; meshing characteristics; contact line length

引用格式: 卜晓琨, 付晓军, 徐烨, 等. 行星滚柱丝杠不完整齿轮副啮合特性分析[J]. 西北工业大学学报, 2025, 43(6): 1192-1200

BU Xiaokun, FU Xiaojun, XU Ye, et al. Analysis of meshing characteristics of incomplete gear pair in planetary roller screw mechanism[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2025, 43(6): 1192-1200 (in Chinese)