

Bayes 理论下具有随机事件触发机制的 DDS-DNNS 状态估计

顾昊伦, 戴邵武, 万兵

(海军航空大学 岸防兵学院, 山东 烟台 264001)

摘要:针对基于数据分发服务的分散式组网导航系统(decentralized networked navigation system based on DDS, DDS-DNNS)单定位节点状态估计问题,考虑节点能量约束及传感器增益退化,以 Bayes 理论为基础,设计了具有随机事件触发机制(stochastic event-triggered, SET)的 DDS-DNNS 最小均方误差状态估计器。其中,SET 机制通过比较是否传输测量值对应的后验估计的差异来决定测量值的重要程度。以此为基础,选取 Wasserstein 距离作为度量来表示后验估计的差异,并利用 Wasserstein 距离的性质及 Bayes 定理证明了后验估计是 Gaussian 的,从而得到了估计器的类 Kalman 滤波递推形式以及 SET 机制的显式表达式。证明了估计器的预测误差协方差有界,且上界和下界均收敛,同时,证明了平均信息传输率有界并推导得到了上界和下界的表达式。利用算例仿真演示了如何通过平均信息传输率的上界和下界确定调整矩阵,模拟了 SET 机制中一阶矩信息和二阶矩信息对 SET 机制的影响,同时采用比较实验验证了估计器的有效性。

关键词:Bayes 理论;随机事件触发;Kalman 滤波;后验估计;最小均方误差状态估计

中图分类号:V249.32⁺9

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2026)01-0112-13

DDS-DNNS 是一套自主研发的面向蜂群无人机局部定位需求的网络化导航系统^[1]。在大规模组网情景下,DDS-DNNS 所面临的组网压力主要体现在 3 个方面:①能量有限的电池使得无人机面临着严峻的能量约束^[2-4];②有限的带宽资源随着数据包传输总量的增大而难以满足高质量通信需求^[5-7];③DDS-DNNS 传感器本身的增益退化导致估计器性能衰减^[8]。

考虑到多个定位节点情景下,传感器与传感器之间测量值的交互会加剧上述三方面的压力,本文重点研究单个定位节点动态模型的估计器设计问题,后续将在此基础上进一步研究多节点融合估计器设计。

对于单个定位节点的状态估计器设计,需要重点考虑的是能量约束与传感器增益退化。文献[9]指出降低传感器到估计器的信息传输率能够有效缓

解传感器的工作压力。因此,估计器需要通过设计判断准则筛选出对状态估计重要的信息。基于上述想法,文献[9]提到的事件触发(event-triggered, ET)机制将被应用至 DDS-DNNS 中,ET 机制仅传输满足重要性度量的传感器测量值,有效地权衡了估计器性能和传感器工作压力。

对于 ET 机制中如何判断测量值的重要性程度,文献[10-14]设计了触发阈值为常数的 ET 机制,即确定性 ET(deterministic event-triggered, DET)机制。DET 机制下,传感器传输测量值至估计器当且仅当触发条件超过特定阈值。DET 机制有效降低了传感器至估计器的信息传输率,但是,文献[10-14]设计的 DET 机制显然截断了新息序列的 Gaussian 概率密度函数(probability density function, PDF),导致难以获取准确的最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)估计器。为此,文献[15]设计了基于新息的 DET 机制,该机制通过广义封闭偏正态分布推导得到,能够证明对应 MMSE 估计器的准确性。但是,文献[15]设计的

MMSE 估计器复杂度很高,难以应用到工程实践中。

为了解决 DET 机制存在的问题,文献[16]提出了触发阈值为随机变量的 ET 机制,即 SET 机制。SET 机制下,触发阈值为均匀分布在 $[0, 1]$ 上的随机变量。SET 机制能够将信息传输率转化为类似于 Gaussian PDF 形式,从而保持新息序列是 Gaussian 的。文献[17]将文献[16]提出的 SET 机制应用到至多传感器数据融合中,并分析了计算复杂度。文献[18-20]则将 SET 机制应用到不同网络化系统的状态估计中,并分析了 MMSE 估计器的稳定性。文献[21]聚焦于 SET 机制本身,设计了一种基于差值发送(send on delta, SoD)的 SET 机制,这种机制有效降低了计算复杂度,但是,这种机制本质上与文献[16]提出的基于新息的 SET 机制不同,不符合 Kalman 滤波器的更新原理,因此在信息传输率较低时,性能比基于新息的 SET 机制差。文献[22]针对文献[21]出现的问题,牺牲了一部分计算效率,设计了一种基于有限脉冲响应(finite impulse response, FIR)的 SET 机制。这种机制尽管提高了低信息传输率时 MMSE 估计器的性能,但是相较于基于新息的 SET 机制而言仍然有差距。事实上,文献[16]中基于新息的 SET 机制,本质上是通过测量值和先验估计的差异推导得到,反映到 SET 机制的表达式上为一阶矩信息,但从 Bayes 理论的角度考虑,后验估计是最全面的信息。因此,文献[23]设计了一种基于信息向量的 SET 机制,该机制考虑了二阶矩信息,但是没有考虑传感器本身的增益退化,且由该机制推导得到的 MMSE 估计器计算复杂度较高,并不适用于 DDS-DNNS。

综上所述,本文针对具有传感器增益退化的 DDS-DNNS 单定位节点动态模型设计了一种具有 SET 机制的 MMSE 估计器,该估计器具有以下特点:①SET 机制从 Bayes 理论角度出发进行设计,该机制的核心是测量值的重要程度取决于是否传输测量值对应的后验估计;②SET 机制与 MMSE 估计器输出的内在交联导致 SET 机制的显式表达式未知,为此选取了合适的度量来表示后验估计的差异,并通过 Bayes 定理推导得到 MMSE 估计器的类 Kalman 滤波递推形式,从而得到 SET 机制的解析形式;③MMSE 估计器的状态先验 PDF 协方差有界,且上界和下界均收敛,在此基础上,推导得到的平均信息传输率同样有界,因此调整矩阵可通过与平均信息传输率的关系确定;④SET 机制包含一阶矩信息和二

阶矩信息,且平均信息传输率较低时,两者同时影响 SET 机制,随着平均信息传输率增大,二阶矩的影响程度越来越小。

1 问题描述

1.1 系统模型

考虑定位传感器具有增益退化的性质,设 DDS-DNNS 中定位节点的动态模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \boldsymbol{\omega}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) = \boldsymbol{\eta}(k)\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (1)$$

(1)式为具有 Gaussian 噪声的线性离散系统,测量值 $\mathbf{z}(k)$ 将通过 SET 机制传输至估计器,其中, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^m$ 为测量值, $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为协方差是 $\mathbf{P}_{\omega} > 0$ 的 Gaussian 白噪声, $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^m$ 为协方差是 $\mathbf{P}_v > 0$ 的 Gaussian 白噪声, $\boldsymbol{\eta}(k) \in \mathbf{R}$ 为分布在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上的随机变量, $\eta_1, \eta_2 \in [0, 1]$, $\boldsymbol{\eta}(k)$ 越大,传感器增益退化程度越小。假设:①初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 是 Gaussian 的,且均值为 $\mathbf{x}(0|0)$,协方差为 $\mathbf{P}(0|0) > 0$;② $\mathbf{x}(0), \boldsymbol{\omega}(k), \mathbf{v}(k)$ 相互独立;③ (\mathbf{C}, \mathbf{A}) 可观测。

1.2 基于后验估计的 SET 机制

对于采样时刻 k ,设 $\xi(k) = 1$ 代表定位节点需要自身的测量值 $\mathbf{z}(k)$ 并且传感器将 $\mathbf{z}(k)$ 传输至估计器,反之 $\xi(k) = 0$,则定位节点估计器的可用信息集 $\mathbf{D}(1:k)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(1:k) &= \{\mathbf{D}(1), \mathbf{D}(2), \dots, \mathbf{D}(k)\}, \\ \mathbf{D}(k) &= \{\xi(k), \xi(k)\mathbf{z}(k)\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{D}(k)$ 为每个采样时刻 k 传输至估计器的信息,且 $\mathbf{D}(1:0) = \emptyset$ 。

设 $\mathbf{x}(k|k-1)$ 和 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 分别为状态先验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1))$ 的均值和协方差, $\mathbf{x}(k|k)$ 和 $\mathbf{P}(k|k)$ 分别为状态后验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k))$ 的均值和协方差, $\bar{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 和 $\bar{\mathbf{x}}(k|k)$ 分别为先验估计误差和后验估计误差,则上述变量的定义为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k|k-1) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1)] \\ \bar{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k-1) \\ \mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{E}[\bar{\mathbf{x}}(k|k-1) \cdot \bar{\mathbf{x}}^T(k|k-1) | \mathbf{D}(1:k-1)] \\ \mathbf{x}(k|k) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k)] \\ \bar{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k) \\ \mathbf{P}(k|k) = \mathbf{E}[\bar{\mathbf{x}}(k|k)\bar{\mathbf{x}}^T(k|k) | \mathbf{D}(1:k)] \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{x}(k|k-1)$ 相当于 $\mathbf{x}(k)$ 的一步预测值; $\mathbf{x}(k|k)$ 相当于 $\mathbf{x}(k)$ 的状态估计值。若定位节点每个采样时刻 k 均使用自身的测量值, 则后验估计的均值 $\mathbf{x}(k|k)$ 和误差协方差 $\mathbf{P}(k|k)$ 可由(4)~(8)式所示标准 Kalman 滤波(Kalman filter, KF)给出。

$$\mathbf{x}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1|k-1) \quad (4)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_\omega \quad (5)$$

$$\mathbf{K}(k) = \eta(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T \cdot (\eta^2(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{z}(k) - \mathbf{z}(k|k-1)) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\eta(k)\mathbf{C})\mathbf{P}(k|k-1) = (\mathbf{P}^{-1}(k|k-1) + \eta^2(k)\mathbf{C}^T\mathbf{P}_v^{-1}\mathbf{C})^{-1} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{z}(k|k-1) = \mathbf{E}[\mathbf{z}(k) | \mathbf{D}(1:k-1)]$ 。

在传统 SET 机制中, 新息 $\mathbf{z}(k) - \mathbf{z}(k|k-1)$ 是判断事件是否触发的基础。下面将设计基于后验估计的 SET 机制。设 $\mathbf{x}_1(k)$ 代表 $\xi(k) = 1$ 时的后验估计, $\mathbf{x}_0(k)$ 代表 $\xi(k) = 0$ 时的后验估计。假设 d 为任意一种度量, $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 代表 $\mathbf{x}_0(k)$ 与 $\mathbf{x}_1(k)$ 之间的距离。若 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 较大, 则代表定位节点需要采样时刻 k 的测量值 $\mathbf{z}(k)$, 用以减小 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$; 若 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 较小, 则代表无论是否利用 $\mathbf{z}(k)$, 后验估计均变化不大, 即定位节点无需 $\mathbf{z}(k)$ 。综上, SET 机制的核心思路为: $\mathbf{z}(k)$ 的重要程度取决于后验估计 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 的差异程度, 即

$$\xi(k) = \begin{cases} 0, & e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))} \geq \varphi(k), \\ 1, & e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))} < \varphi(k) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\varphi(k)$ 在 $[0, 1]$ 上均匀分布。为了给出度量 d , 对于随机变量 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$, 给出后验估计的 Wasserstein 距离定义。

定义 1(后验估计的 Wasserstein 距离) 设 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 的 Wasserstein 距离为 $\tilde{\omega}_J(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 。 $p(\mathbf{x}_0(k))$ 和 $p(\mathbf{x}_1(k))$ 分别为 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 的 PDF, 则^[24]

$$\tilde{\omega}_J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \left(\inf_{\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)} \iint \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|_J^2 \gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_0 d\mathbf{x}_1 \right)^{1/2} \quad (10)$$

式中

$$\gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \in \{f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) | \int f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_0 = p(\mathbf{x}_1), \int f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = p(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geq 0\},$$

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|_J^2 = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1) \quad (11)$$

式中, $\mathbf{J} > \mathbf{0}$ 为调整矩阵, 用以调整不同状态分量的权重以及信息传输率。若 $p(\mathbf{x}_0(k))$ 和 $p(\mathbf{x}_1(k))$ 是 Gaussian 的, 满足

$$p(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{P}_{x_0})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T \mathbf{P}_{x_0}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)},$$

$$p(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{P}_{x_1})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1)^T \mathbf{P}_{x_1}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_1)} \quad (12)$$

记 $p(\mathbf{x}_0) = N(\mathbf{x}_0; \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{x_0})$, $p(\mathbf{x}_1) = N(\mathbf{x}_1; \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{P}_{x_1})$, 则 $\tilde{\omega}_J(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 的解析表达式为

$$J_J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = (\|\bar{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_1\|_J^2 + \text{tr}(\mathbf{P}_{x_0}\mathbf{J} + \mathbf{P}_{x_1}\mathbf{J} - 2(\mathbf{J}^{1/2}\mathbf{P}_{x_0}\mathbf{J}\mathbf{P}_{x_1}\mathbf{J}^{1/2})^{1/2}))^{1/2} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{J}^{1/2}$ 代表 \mathbf{J} 的平方根矩阵。

根据定义 1 可知, 当后验估计 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 服从 Gaussian 分布时, (10) 式具有如(13)式所示的解析形式。不妨令 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = I_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$, 后续只需要证明当 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = I_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 时, $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 服从 Gaussian 分布, 那么(9)式所示 SET 机制能够得到解析形式。

综上, 下文将在系统模型(1)以及 SET 机制(9)的基础上, 解决如下问题:

1) 在 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = I_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 的条件下, 证明 $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k))$ 的 Gaussian 性, 从而推导得到 $\mathbf{x}(k|k)$ 和 $\mathbf{P}(k|k)$ 的递推解算形式以及 SET 机制(9)的显示表达式;

2) 分析估计器的稳定性;

3) 分析平均信息传输率与调整矩阵 \mathbf{J} 的关系, 并且分析基于后验估计的 SET 中各个组成项如何影响 SET 机制。

2 MMSE 估计器设计

2.1 MMSE 估计器的类 KF 形式

引理 1^[25] 设 $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Y} > \mathbf{0}, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 则 $\mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ 。

定理 1 当 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = I_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 时, 状态后验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k))$ 是 Gaussian 的, 且后验估计均值 $\mathbf{x}(k|k)$ 和协方差 $\mathbf{P}(k|k)$ 通过以下类 KF 形式递推解算得到:

$$\mathbf{x}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1|k-1) \quad (14)$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_\omega \quad (15)$$

$$\mathbf{K}(k) = \eta(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T \cdot$$

$$(\eta^2(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} \quad (16)$$

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \xi(k)\mathbf{K}(k)(\mathbf{z}(k) - \eta(k)\mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1)) \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\eta(k)\mathbf{C})\mathbf{P}(k|k-1) + (1 - \xi(k))\mathbf{K}(k)((\eta^2(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k))^{-1}\mathbf{K}^T(k) \quad (18)$$

证明 利用数学归纳法证明定理 1。初始采样时刻, $p(\mathbf{x}(0) | \mathbf{D}(1:0)) = N(\mathbf{x}(0); \mathbf{x}(0|0), \mathbf{P}(0|0))$ 。设 $k-1$ 采样时刻, 状态后验 PDF Gaussian, 即

$$p(\mathbf{x}(k-1) | \mathbf{D}(1:k-1)) = N(\mathbf{x}(k-1); \mathbf{x}(k-1|k-1), \mathbf{P}(k-1|k-1)) \quad (19)$$

则 k 采样时刻的状态先验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1))$ 是 Gaussian 的, 满足

$$p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1)) = N(\mathbf{x}(k); \mathbf{x}(k|k-1), \mathbf{P}(k|k-1)) \quad (20)$$

$\mathbf{x}(k|k-1)$ 和 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 可通过(14) ~ (15) 式得到。

根据(9) 式可知, $\xi(k)$ 仅与 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 有关, 而根据 $\mathbf{x}_0(k)$ 和 $\mathbf{x}_1(k)$ 的定义可知, $\xi(k)$ 实际上依赖于 $\mathbf{z}(k)$ 和 $\mathbf{D}(1:k-1)$ 。同时, 由于 $\omega(k)$ 和 $\mathbf{v}(k)$ 均为 Gaussian 白噪声, (1) 式所示系统模型实际上是一个一阶隐式 Markov 模型。因此, 在给定 $\mathbf{z}(k)$ 和 $\mathbf{D}(1:k-1)$ 的情况下, $\xi(k)$ 独立于 $\mathbf{x}(k)$ 。

根据 Bayes 定理可得

$$p(\mathbf{x}_1(k)) = \Pr(\xi(k) = 1 | \mathbf{x}(k), \mathbf{z}(k), \mathbf{D}(1:k-1))p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) / \Pr(\xi(k) = 1 | \mathbf{z}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) \quad (21)$$

$$p(\mathbf{x}_0(k)) = p(\mathbf{x}(k) | \xi(k) = 0, \mathbf{D}(1:k-1)) = \Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) \cdot p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1)) / \Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{D}(1:k-1)) \quad (22)$$

与标准 KF 类似, (21) 式中的 $p(\mathbf{x}_1(k))$ 满足

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_1(k)) = N(\mathbf{x}(k); \mathbf{x}_1(k|k), \mathbf{P}_1(k|k)) \\ \mathbf{x}_1(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{z}(k) - \eta(k)\mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1)) \\ \mathbf{P}_1(k|k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\eta(k)\mathbf{C})\mathbf{P}(k|k-1) \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{K}(k)$ 通过(16) 式得到。

对于(22) 式中的 $\Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1))$, 根据全概率公式可得

$$\Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) = \int \Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{v}(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) \cdot$$

$$N(\mathbf{v}(k); \mathbf{0}, \mathbf{P}_v) d\mathbf{v}(k) \quad (24)$$

由于 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = I_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$, 根据(9), (13) 及(23) 式可得

$$\Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{v}(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) = \theta(k) e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{K}(k)\mathbf{v}(k) - \sigma(k)\|_J^2} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \theta(k) = e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{P}_0(k|k)\mathbf{J} + \mathbf{P}_1(k|k)\mathbf{J} - 2(\mathbf{J}^{1/2}\mathbf{P}_0(k|k)\mathbf{J}\mathbf{P}_1(k|k)\mathbf{J}^{1/2})^{1/2})} \\ \sigma(k) = \mathbf{x}_0(k|k) - \mathbf{x}(k|k-1) - \eta(k)\mathbf{K}(k)(\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1)) \\ \mathbf{x}_0(k|k) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k-1), \xi(k) = 0] \\ \mathbf{P}_0(k|k) = \mathbf{E}[(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0(k|k)) \cdot (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_0(k|k))^T | \mathbf{D}(1:k-1), \xi(k) = 0] \end{cases} \quad (26)$$

注意到 $\mathbf{x}_0(k)$ 与 $\mathbf{z}(k)$ 不直接相关, $\mathbf{v}(k)$ 的变化不会影响 $\mathbf{x}_0(k|k)$ 和 $\mathbf{P}_0(k|k)$, 因此, 根据(25) ~ (26) 式可得(24) 式的解析形式为

$$\Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{x}(k), \mathbf{D}(1:k-1)) = \int \theta(k) \bar{\theta}(k) \hat{\theta}(k) e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{v}(k) - \mathbf{H}^{-1}(k)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\sigma(k)\|_{\mathbf{H}(k)}^2} d\mathbf{v}(k) = \theta(k) \bar{\theta}(k) \hat{\theta}(k) (2\pi)^{n/2} \det(\mathbf{H}^{-1}(k))^{1/2} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}(k) = \mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k) + \mathbf{P}_v^{-1} \\ \bar{\theta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det \mathbf{P}_v^{1/2}} \\ \hat{\theta}(k) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma^T(k)\mathbf{J}\sigma(k) - \sigma^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k)\mathbf{H}^{-1}(k)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\sigma(k))} \end{cases} \quad (28)$$

将(27) ~ (28) 式及(20) 式代入(22) 式可得

$$p(\mathbf{x}_0(k)) = \vartheta(k) \bar{\vartheta}(k) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\mu}(k))^T \mathbf{Q}(k)(\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\mu}(k))} \quad (29)$$

式中

$$\begin{cases} \vartheta(k) = \theta(k) \bar{\theta}(k) / (\Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{D}(1:k-1)) \cdot \det(\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k|k-1))^{1/2}) \\ \bar{\vartheta}(k) = e^{\frac{1}{2}(\mathbf{a}(k) - \boldsymbol{\alpha}^T(k)(\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{K}(k)\mathbf{H}^{-1}(k)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J})\boldsymbol{\alpha}(k) - b(k))} \\ \mathbf{a}(k) = \boldsymbol{\mu}^T(k)\mathbf{Q}(k)\boldsymbol{\mu}(k) \\ b(k) = \mathbf{x}^T(k|k-1)\mathbf{P}^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1) \\ \boldsymbol{\alpha}(k) = \mathbf{x}_0(k|k) - \mathbf{x}(k|k-1) + \eta(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1) \\ \boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{Q}^{-1}(k)(\mathbf{R}(k)\boldsymbol{\alpha}(k) + \mathbf{P}^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1)) \\ \mathbf{Q}(k) = \eta^2(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k)(\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{H}^{-1}(k)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J})\mathbf{K}(k)\mathbf{C} + \mathbf{P}^{-1}(k|k-1) \\ \mathbf{R}(k) = \eta(k)\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T(k)(\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{K}(k)\mathbf{H}^{-1}(k)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}) \end{cases} \quad (30)$$

至此,利用 Bayes 定理推导得到 $p(\mathbf{x}_0(k))$ 的解析表达式如 (29) 式所示。由 (29) 式可知, $p(\mathbf{x}_0(k))$ 是 Gaussian 的,又根据 (30) 式可知 $\vartheta(k)$ 和 $\bar{\vartheta}(k)$ 均为与 $\mathbf{x}(k)$ 相关的常数,因此对 (29) 式等式两边积分可得

$$\vartheta(k)\bar{\vartheta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\mathbf{Q}^{-1}(k))^{1/2}} \quad (31)$$

结合 (31) 式和 (29) 式可知

$$p(\mathbf{x}_0(k)) = N(\mathbf{x}(k); \boldsymbol{\mu}(k), \mathbf{Q}^{-1}(k)) = N(\mathbf{x}(k); \mathbf{x}_0(k|k), \mathbf{P}_0(k|k)) \quad (32)$$

综上,根据 (23), (32) 式可知 $p(\mathbf{x}_0(k))$ 和 $p(\mathbf{x}_1(k))$ 是 Gaussian 的,因此, k 采样时刻的状态后验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k))$ 是 Gaussian 的,通过数学归纳法可知,当 $d(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k)) = \Gamma_J^2(\mathbf{x}_0(k), \mathbf{x}_1(k))$ 时,状态后验 PDF $p(\mathbf{x}(k) | \mathbf{D}(1:k))$ 是 Gaussian 的。

根据 (32) 式可得 $\mathbf{x}_0(k|k) = \boldsymbol{\mu}(k)$,将 (30) 式中 $\boldsymbol{\mu}(k)$ 的表达式代入 (32) 式中可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1}(k)(\mathbf{R}(k) - \mathbf{Q}(k))\mathbf{x}_0(k|k) = & \mathbf{Q}^{-1}(k)\mathbf{R}(k)(\mathbf{x}(k|k-1) - \\ & \eta(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{C}\mathbf{x}(k|k-1)) - \\ & \mathbf{Q}^{-1}(k)\mathbf{P}^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (33)$$

对 (33) 式化简可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(k) - \mathbf{Q}(k))\mathbf{x}_0(k|k) = & (\mathbf{R}(k) - \mathbf{R}(k)\eta(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{C} - \\ & \mathbf{P}^{-1}(k|k-1))\mathbf{x}(k|k-1) = \\ & (\mathbf{R}(k) - \mathbf{Q}(k))\mathbf{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (34)$$

因此

$$\mathbf{x}_0(k|k) = \boldsymbol{\mu}(k) = \mathbf{x}(k|k-1) \quad (35)$$

对比 (35) 式和 (17) 式可知 $\mathbf{x}_0(k|k)$ 满足 (17) 式形式。将 (23) 式中 $\mathbf{P}_1(k|k)$ 写成 (8) 式中的形式,并代入 (30) 式中的 $\mathbf{Q}(k)$,通过引理 1 可将 $\mathbf{Q}(k)$ 化简为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(k) = & \mathbf{P}_1^{-1}(k|k) - \\ & \eta^2(k)\mathbf{C}^T\mathbf{P}_v^{-1}(\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k) + \mathbf{P}_v^{-1})^{-1}\mathbf{P}_v^{-1}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (36)$$

又通过 (32) 式可知 $\mathbf{P}_0(k|k) = \mathbf{Q}^{-1}(k)$,因此 $\mathbf{P}_0(k|k) = \mathbf{P}_1(k|k) +$

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}(k)((\eta^2(k)\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \\ & \mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k))^{-1}\mathbf{K}^T(k) \end{aligned} \quad (37)$$

对比 (37) 式和 (18) 式可知 $\mathbf{P}_0(k|k)$ 满足 (18)

式形式。

综上所述,定理 1 证毕。

根据定理 1,将 $\bar{\mathbf{x}}_0(k), \bar{\mathbf{x}}_1(k), \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}(k), \mathbf{P}_{\mathbf{x}_1}(k)$ 代入 (13) 式,也就是将 (23), (35), (37) 式代入 (13) 式,经过整理后可得基于后验估计的 SET 机制解析表达式为

$$\xi(k) = \begin{cases} 0, & e^{-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{\delta}(k)\|_{\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k)}^2 + \rho(k))} \geq \varphi(k) \\ 1, & e^{-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{\delta}(k)\|_{\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k)}^2 + \rho(k))} < \varphi(k) \end{cases} \quad (38)$$

式中: $\boldsymbol{\delta}(k)$ 为新息, $\boldsymbol{\delta}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{z}(k|k-1)$; $\rho(k)$ 表达式为

$$\begin{aligned} \rho(k) = & \text{tr}(\mathbf{P}_1(k|k)\mathbf{J} + \mathbf{P}_0(k|k)\mathbf{J} - \\ & 2(\mathbf{J}^{1/2}\mathbf{P}_0(k|k)\mathbf{J}\mathbf{P}_1(k|k)\mathbf{J}^{1/2})^{1/2} \end{aligned} \quad (39)$$

由 (38) 式可知,基于后验估计的 SET 机制实际上分为两部分: ① 一阶矩信息 $\|\boldsymbol{\delta}(k)\|_{\mathbf{K}^T(k)\mathbf{J}\mathbf{K}(k)}$; ② 二阶矩信息 $\rho(k)$ 。其中,第一部分与基于新息的传统 SET 机制类似,第二部分内容是传统 SET 机制中并未考虑的二阶矩信息。 $\xi(k)$ 的解析形式符合 Bayes 理论,即后验信息是估计中最全面的信息。

2.2 MMSE 估计器性能分析

定义离散 Riccati 方程为

$R_Y(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_\omega - \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}^T + \mathbf{Y})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{A}^T$ 式中, $\mathbf{X} \geq 0, \mathbf{Y} \geq 0, R_Y^k(\mathbf{X}) = R_Y(R_Y^k(\mathbf{X}))$, 且 $R_Y^0(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ 。上述 Riccati 方程满足当 $\mathbf{X}_1 \geq \mathbf{X}_2 \geq 0$ 时, $R_Y(\mathbf{X}_1) \geq R_Y(\mathbf{X}_2)$ ^[26]。下面通过定理 2 证明 (15) 式中的 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 有界并且上界和下界均收敛。

定理 2 对于具有如 (38) 式所示 SET 机制的系统模型 (1),若 \mathbf{C} 行满秩,则 (15) 式中的 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 对 $\forall k \in \mathbf{N}^+$, 满足

$$0 < \underline{\mathbf{P}}(k) \leq \mathbf{P}(k|k-1) \leq \widehat{\mathbf{P}}(k) \quad (40)$$

式中

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}(k) = & R_{\mathbf{P}_v}^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{P}(0|0)\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_\omega) \\ \widehat{\mathbf{P}}(k) = & R_{\mathbf{P}_v + \mathbf{U}^{-1}(k)}(\widehat{\mathbf{P}}(k)(k-1)) \\ \mathbf{U}(k) = & \lambda_{\min}(\mathbf{J})/\lambda_{\max}(\mathbf{C}^T\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{I} + 1/\tau(k) \cdot \\ & (\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1} + \mathbf{P}_v\mathbf{P}_v + \tau(k) \cdot \\ & \mathbf{P}_v(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{P}_v)^{-1} \\ \tau(k) = & (\text{tr}((\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}))^{1/2} / \\ & (\text{tr}(\mathbf{P}_v(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{C}\underline{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{P}_v))^{1/2} \\ \widehat{\mathbf{P}}(1) = & \mathbf{A}\mathbf{P}(0|0)\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_\omega \end{aligned} \quad (41)$$

不仅如此,矩阵序列 $\{\underline{\mathbf{P}}(k)\}$ 和 $\{\widehat{\mathbf{P}}(k)\}$ 分别收

敛于 \underline{P} 和 \hat{P} , 且 \underline{P} 和 \hat{P} 分别为 (42) 式所示的 2 个 Riccati 方程的唯一正定解。

$$\begin{cases} R_{P_v}(X) = X \\ R_{P_v+U^{-1}}(X) = X \\ U = \lambda_{\min}(J) / \lambda_{\max}(C^T C) \cdot (I + 1/\tau \cdot \\ (C P C^T)^{-1} (C P C^T)^{-1} + P_v P_v + \tau \cdot \\ P_v (C P C^T)^{-1} (C P C^T)^{-1} P_v)^{-1} \\ \tau = (\text{tr}((C P C^T)^{-1} (C P C^T)^{-1}))^{1/2} / \\ (\text{tr}(P_v (C P C^T)^{-1} (C P C^T)^{-1} P_v))^{1/2} \end{cases} \quad (42)$$

证明 $k = 1$ 时, $P(1|0) = AP(0|0)A^T + P_\omega$, 显然满足 $\underline{P}(1) = R_{P_v}^0(AP(0|0)A^T + P_\omega) \leq P(1|0)$ 。假设 $R_{P_v}^{k-1}(AP(0|0)A^T + P_\omega) \leq P(k|k-1)$, 则根据定理 1 中 (15), (18) 式可得

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= AP(k|k-1)A^T + P_\omega - \\ &AP(k|k-1)C^T(CP(k|k-1)C^T + P_v)^{-1} \cdot \\ &CP(k|k-1)A^T + (1 - \xi(k))K(k) \cdot \\ &((\eta^2(k)CP(k|k-1)C^T + P_v)^{-1} + \\ &K^T(k)JK(k))^{-1}K^T(k) \geq \\ &AP(k|k-1)A^T + P_\omega - \\ &AP(k|k-1)C^T(CP(k|k-1)C^T + P_v)^{-1} \cdot \\ &CP(k|k-1)A^T = R_{P_v}(P(k|k-1)) \geq \\ &R_{P_v}(R_{P_v}^{k-1}(AP(0|0)A^T + P_\omega)) = \\ &R_{P_v}^k(AP(0|0)A^T + P_\omega) = \underline{P}(k+1) \end{aligned} \quad (43)$$

注意到 $R_{P_v}^1(0) = R_{P_v}(R_{P_v}^0(0)) \geq R_{P_v}^0(0)$, 依次类推可得序列 $\{R_{P_v}^k(0)\}$ 单调非减, 因此对于所有的 $k > 1$, $R_{P_v}^k(AP(0|0)A^T + P_\omega) \geq R_{P_v}^k(0) \geq R_{P_v}^1(0) = P_v > 0$ 。至此, 根据数学归纳法可得 $0 < \underline{P}(k) \leq P(k|k-1)$ 。

若 C 行满秩, 则根据 (16) 式可知 $K^T(k)JK(k)$ 非奇异, 因此, (43) 式中 $P(k+1|k)$ 可通过矩阵求逆引理^[27] 转换为

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= AP(k|k-1)A^T + P_\omega - \\ &AP(k|k-1)C^T(CP(k|k-1)C^T + P_v + \\ &(1 - \xi(k))(K^T(k)JK(k))^{-1})^{-1}CP(k|k-1) \cdot \\ &A^T = R_{P_v+(1-\xi(k))(K^T(k)JK(k))^{-1}}(P(k|k-1)) \end{aligned} \quad (44)$$

同时, 通过文献[28]中的引理 2.2 可得 $K^T(k)JK(k) \geq \lambda_{\min}(J) / \lambda_{\max}(C^T C) \cdot (I + (CP(k|k-1)C^T)^{-1}P_v)^{-1} \cdot$

$$(I + P_v(CP(k|k-1)C^T)^{-1})^{-1} \geq U(k) \quad (45)$$

$k = 1$ 时, $P(1|0) \leq \hat{P}(1)$, 假设 $P(k|k-1) \leq \hat{P}(k)$, 则根据 (44) ~ (45) 式可得 $P(k+1|k) = R_{P_v+(1-\xi(k))(K^T(k)JK(k))^{-1}}(P(k|k-1)) \leq R_{P_v+U^{-1}(k)}(P(k|k-1)) \leq R_{P_v+U^{-1}(k)}(\hat{P}(k)) = \hat{P}(k+1)$ (46)

综上, $0 < \underline{P}(k) \leq P(k|k-1) \leq \hat{P}(k)$ 得证。

由于 $\underline{P}(k) = R_{P_v}^{k-1}(AP(0|0)A^T + P_\omega)$, 因此根据 Riccati 方程的性质可知 $\{\underline{P}(k)\}$ 收敛于 $R_{P_v}(X) = X$ 的唯一正定解 \underline{P} 。下面只需证明 $\{\hat{P}(k)\}$ 的收敛性。通过 $\{\underline{P}(k)\}$ 的收敛性, 结合 (41) 式中 $U(k)$ 的表达式可得 $\{U^{-1}(k)\}$ 是收敛的, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U^{-1}(k) = U^{-1} \quad (47)$$

根据 (47) 式可知, 存在矩阵 \hat{U} , 使得对 $\forall k \in \mathbf{N}^+$, $\hat{U} \geq U^{-1}(k)$, 因此

$$\begin{aligned} \hat{P}(k) &= R_{P_v+U^{-1}(k)}(\hat{P}(k-1)) \leq \\ &R_{P_v+\hat{U}}(\hat{P}(k-1)) \leq \dots \leq R_{P_v+\hat{U}}^{k-1}(\hat{P}(1)) \end{aligned} \quad (48)$$

又 $\hat{P}(1) = AP(0|0)A^T + P_\omega$, 所以根据 Riccati 方程的性质可知, 序列 $\{R_{P_v+\hat{U}}^{k-1}(\hat{P}(1))\}$ 收敛, 根据 (48) 式可知, 存在矩阵 P' , 使得对 $\forall k \in \mathbf{N}^+$, $\hat{P}(k) \leq P'$ 。同时, 根据 (46) 式可得对 $\forall k \in \mathbf{N}^+$, $\hat{P}(k) \geq P_\omega$ 。然后, 根据 (47) 式以及收敛性的定义可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_1 \in \mathbf{N}^+$, 使得

$$U^{-1} - \varepsilon I < U^{-1}(k) < U^{-1} + \varepsilon I, \quad \forall k > k_1 \quad (49)$$

令 $k = k_1 + k_2$, 则综合上述分析可得

$$R_{P_v+U^{-1}-\varepsilon I}^k(P_\omega) < \hat{P}(k_1 + k_2) < R_{P_v+U^{-1}+\varepsilon I}^k(P') \quad (50)$$

对 (50) 式两边同时令 $k_1, k_2 \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{P_v+U^{-1}}^k(P_\omega) < \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{P}(k) < \lim_{k \rightarrow \infty} R_{P_v+U^{-1}}^k(P') \quad (51)$$

通过 (51) 式, 根据 Riccati 方程解的唯一性可知, $\{\hat{P}(k)\}$ 收敛于 \hat{P} , 且满足 $R_{P_v+U^{-1}}(\hat{P}) = \hat{P}$ 。

综上所述, 定理 2 证毕。

在定理 2 基础上, 有必要研究 MMSE 估计器的 2

个性质:

① 估计器在拥有前 $k - 1$ 个采样时刻可用信息的条件下, 是否需要第 k 个采样时刻的测量值, 为此, 定义信息传输率 $q(k)$ 为 $\mathbf{D}(1 : k - 1)$ 条件下 $\xi(k)$ 的期望, 即

$$q(k) = E[\xi(k) | \mathbf{D}(1 : k - 1)] \quad (52)$$

② 平均信息传输率是否有界, 如果有, 需要满足什么条件. 为此, 定义平均信息传输率 ξ 为

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[\frac{\sum_{i=1}^k \xi(i)}{k} \right] \quad (53)$$

下面通过定理 3 研究上述 2 个问题.

引理 2^[29] 若 $\mathbf{X} \geq \mathbf{X}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{Y} \geq \mathbf{Y}_1 \geq \mathbf{0}$, 则有 $\det(\mathbf{XY} + \mathbf{I}) \geq \det(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 + \mathbf{I})$.

定理 3 对于具有如(38)式所示 SET 机制的系统模型(1), 信息传输率 $q(k)$ 满足

$$q(k) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} / (\det((\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v) \cdot \mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k) + \mathbf{I}))^{1/2} \quad (54)$$

不仅如此, 若 \mathbf{C} 行满秩, ξ 是有界的, $\xi \leq \hat{\xi} \leq \hat{\xi}$, 且满足

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= 1 - 1 / (\det(\lambda_{\min}(\mathbf{J})\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \mathbf{I}))^{1/2} \\ \hat{\xi} &= 1 - e^{-\text{tr}(\hat{\mathbf{P}}\mathbf{J})} / (\det(\lambda_{\max}(\mathbf{J})\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \mathbf{I}))^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (55)$$

证明 根据全概率公式可得

$$\begin{aligned} \Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{D}(1 : k - 1)) &= e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} / (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det((\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v))^{1/2} \cdot \int e^{-\frac{1}{2}\delta^T(k)(\mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k) + (\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T)^{-1})\delta(k)} dz(k) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} / (\det((\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v) \cdot \mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k) + \mathbf{I}))^{1/2} \end{aligned} \quad (56)$$

因此

$$\begin{aligned} q(k) &= E[\xi(k) | \mathbf{D}(1 : k - 1)] = 1 - \Pr(\xi(k) = 0 | \mathbf{D}(1 : k - 1)) = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} / (\det((\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v) \cdot \mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k) + \mathbf{I}))^{1/2} \end{aligned} \quad (57)$$

至此推导得到 $q(k)$ 的表达式. 下面证明 ξ 有界.

对于(39)式所示 $\rho(k)$, 由定理 2 中(40)式可得

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} &\geq e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{P}_1(k|k)\mathbf{J} + \mathbf{P}_0(k|k)\mathbf{J})} \geq e^{-\text{tr}(\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{J})} \geq e^{-\text{tr}(\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{J})} \end{aligned} \quad (58)$$

又根据文献[30]中推论 3 可得 $\rho(k) \geq 0$, 因此

$$e^{-\frac{1}{2}\rho(k)} \leq 1 \quad (59)$$

同时, 对 $(\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k)$ 化简可得

$$\begin{aligned} &(\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)\mathbf{K}^T(k)\mathbf{JK}(k) = \mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{JP}(k|k-1)\mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} \end{aligned} \quad (60)$$

根据定理 2, (60)式中 $\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{JP}(k|k-1)\mathbf{C}^T$ 和 $(\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1}$ 分别满足

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{J})\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T &\leq \mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{JP}(k|k-1)\mathbf{C}^T \leq \lambda_{\max}(\mathbf{J})\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} &\leq (\mathbf{CP}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} \leq (\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} \end{aligned} \quad (62)$$

综上, 将(58) ~ (62)式代入(54)式, 根据引

理 2 可得 $q(k) \leq q(k) \leq \hat{q}(k)$, 其中

$$\left\{ \begin{aligned} q(k) &= 1 - 1 / (\det(\lambda_{\min}(\mathbf{J})\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \mathbf{I}))^{1/2} \\ \hat{q}(k) &= 1 - e^{-\text{tr}(\hat{\mathbf{U}}(k)\mathbf{J})} / (\det(\lambda_{\max}(\mathbf{J})\mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}(k)\hat{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C}\mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_v)^{-1} + \mathbf{I}))^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (63)$$

由于 $\{\mathbf{P}(k)\}$ 和 $\{\hat{\mathbf{P}}(k)\}$ 的收敛性, 有

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} q(k) &= \xi, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{q}(k) &= \hat{\xi} \end{aligned} \right. \quad (64)$$

对于(64)式, 根据收敛性的定义可知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists k_3 \in \mathbf{N}^+$, 使得

$$\left\{ \begin{aligned} q(k) &> \xi - \varepsilon, \quad \forall k > k_3 \\ \hat{q}(k) &< \hat{\xi} + \varepsilon, \quad \forall k > k_3 \end{aligned} \right. \quad (65)$$

同时, 根据 $E[\xi(k)]$ 的定义可得

$$\begin{aligned} E[\xi(k)] &= \int \Pr(\xi(k) = 1 | \mathbf{D}(1 : k - 1)) \cdot \rho(\mathbf{D}(1 : k - 1)) d\mathbf{D}(1 : k - 1) \end{aligned} \quad (66)$$

将(52), (54), (63)式代入(66)式可得

$$q(k) \leq E[\xi(k)] \leq \hat{q}(k) \quad (67)$$

综上,结合(53),(65)及(67)式,令 $k = k_3 k_4 + k_3$, 则

$$\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^k E[\xi(i)]}{k} > \frac{\sum_{i=1}^{k_3} E[\xi(i)]}{k} + \frac{k_3 k_4 (\xi - \varepsilon)}{k}, \\ \frac{\sum_{i=1}^k E[\xi(i)]}{k} < \frac{\sum_{i=1}^{k_3} E[\xi(i)]}{k} + \frac{k_3 k_4 (\hat{\xi} + \varepsilon)}{k} \end{cases} \quad (68)$$

令(68)式中 $k_3, k_4 \rightarrow \infty$, 则 $\xi \leq \xi \leq \hat{\xi}$ 。

综上,定理 3 证毕。

由定理 3 可知,调整矩阵 J 与平均信息传输率 ξ 的上界和下界均相关。实际上, J 正是通过 ξ 和 $\hat{\xi}$ 决定的。具体而言,在定位实验前,首先分别得到 ξ 与 J 和 $\hat{\xi}$ 与 J 的关系图,然后给定期望的平均信息传输率 ξ , 通过 2 张关系图得到对应 J 的取值范围。至此,MMSE 估计器不仅具有有收敛上下界的性质,而且能够通过调整矩阵 J 调整期望的平均信息传输率 ξ 。

最后对基于后验估计的 SET 机制与基于新息的传统 SET 机制的差别进行更深入的研究。实际上,根据(38)式可知,2 种机制的差异主要体现在如(39)式所示的 $\rho(k)$ 上,即高阶矩部分。不妨定义 $\xi(k)$ 中一阶矩与高阶矩比值的期望为 $g(k)$, 即

$$g(k) = E[\|\delta(k)\|_{K^T(k)JK(k)}^2 / \rho(k)] \quad (69)$$

$g(k)$ 代表了采样时刻 k , $\|\delta(k)\|_{K^T(k)JK(k)}^2$ 和 $\rho(k)$ 对(38)式的影响程度。 $g(k)$ 越大,代表 $\rho(k)$ 对 SET 机制的影响越小。根据迭代期望定理可得 $g(k)$ 满足

$$\begin{aligned} g(k) &= E[\text{tr}(J^{1/2}P(k|k-1)C^T \cdot \\ & (CP(k|k-1)C^T + P_v)^{-1}CP(k|k-1)J^{1/2}) / \\ & \text{tr}(P_0(k|k)J + P_1(k|k)J - \\ & 2(J^{1/2}P_0(k|k)JP_1(k|k)J^{1/2})^{1/2})] \end{aligned} \quad (70)$$

由(70)式可知, $g(k)$ 与调整矩阵 J 有关,而根据定理 3 可知 J 与平均信息传输率 ξ 有关,因此可以通过 J 来研究 ξ 与 $g(k)$ 的关系,从而研究不同信息传输率下,一阶矩和高阶矩对基于后验估计的 SET 机制的影响程度。然而,(70)式的解析表达式难以获得,因此在第 3 节算例仿真中,将使用 Monte Carlo

模拟来获取 ξ 与 $g(k)$ 的关系。

3 算例仿真

设系统矩阵和量测矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统状态 $x(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^T$, 含义为定位节点的局部坐标 (x, y, z) 。 $\omega(k)$ 和 $v(k)$ 为 Gaussian 白噪声,且 P_ω 和 P_v 满足

$$P_\omega = \kappa^2 \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 & 0.2 \\ 0.06 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, P_v = \begin{bmatrix} \kappa_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z^2 \end{bmatrix}$$

式中, $\kappa^2 = \kappa_z^2 = 0.01, \kappa_x^2 = \kappa_y^2 = 1$ 。传感器增益退化 $\eta(k)$ 满足 $\eta(k) \sim U[0.6, 0.9]$, 调整矩阵 J 满足 $J = j \cdot \text{diag}(2, 2, 1)$, j 为可调参数,采样周期为 0.1 s, 仿真步数为 301, 初始状态 $x(0) = N(x(0); 0, 1)$ 。

首先根据对定理 3 结果的分析确认 j 的值,平均信息传输率的上界 $\hat{\xi}$ 和下界 ξ 与 j 的关系如图 1 所示。

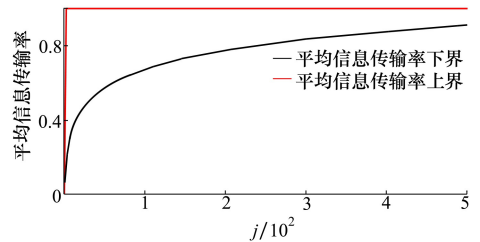


图 1 平均信息传输率的上/下界与 j 的关系图

假设期望的平均信息传输率 ξ 为 0.6, 则只需要得到 $\hat{\xi}(j) = 0.6$ 对应的 j_1 以及 $\xi(j) = 0.6$ 对应的 $j_2, j \in [j_1, j_2]$ 。文献[16, 21-22]中调整矩阵同样设计为 $J = j \cdot \text{diag}(2, 2, 1)$, 且 j 的选取按照上述方法完成。记本文设计的 MMSE 估计器为 PSET, 文献[16]为 ISET, 文献[21]为 FSET, 文献[22]为 SSET, 则不同平均信息传输率下, 4 种 MMSE 估计器的 j 值如表 1 所示。

表 1 不同平均信息传输率下 4 种估计器 j 的取值

ξ	PSET	ISSET	FSET	SSET
0.1	0.08	0.25	0.08	0.02
0.2	0.5	0.80	0.25	0.2
0.3	2.5	2	0.5	0.5
0.4	5.5	4	1	1.5
0.5	10	6	2	3
0.6	25	10	4	6
0.7	50	20	8	15
0.8	90	45	16	40
0.9	200	150	50	200

根据表 1 的结果,下面进行第 2 个仿真实验,设 DDS-DNNS 定位节点的期望轨迹为:从(4,0,3.6)出发,沿直线到(4,5,1.8),再沿直线到(4,0,0)。定位节点期望轨迹如图 2 所示。

设定位节点解算的局部坐标为 $(x(k), y(k), z(k))$,期望值为 $(x_c(k), y_c(k), z_c(k))$,定义 x, y, z 坐标 RMSE 为

$$\begin{cases} r_{m,x}(k) = \sqrt{(x(k) - x_c(k))^2} \\ r_{m,y}(k) = \sqrt{(y(k) - y_c(k))^2} \\ r_{m,z}(k) = \sqrt{(z(k) - z_c(k))^2} \end{cases}$$

定位节点 x 坐标在 $\xi = 0.2$ 和 $\xi = 0.8$ 情景下的变化如图 3 所示,对应的 RMSE 变化如图 4 所示;定位节点 y 坐标在 $\xi = 0.2$ 和 $\xi = 0.8$ 情景下的变化如图 5 所示,对应的 RMSE 变化如图 6 所示;定位节点 z 坐标在 $\xi = 0.2$ 和 $\xi = 0.8$ 情景下的变化如图 7 所示,对应的 RMSE 变化如图 8 所示。

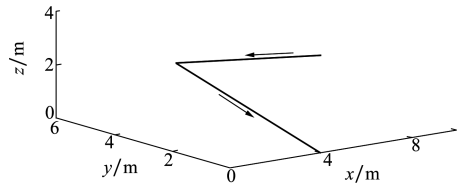


图 2 定位节点期望轨迹图

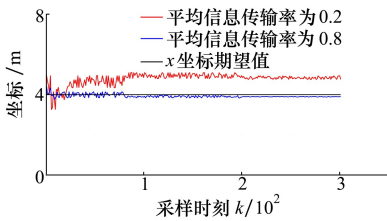


图 3 定位节点坐标 x 在不同信息传输率下的变化

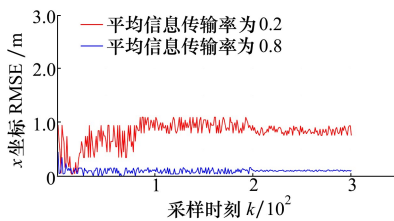


图 4 定位节点坐标 x 的 RMSE 在不同信息传输率下的变化

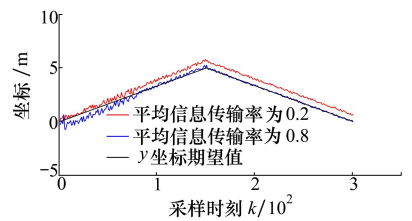


图 5 定位节点坐标 y 在不同信息传输率下的变化

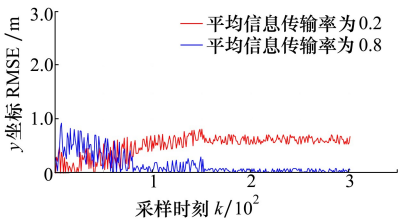


图 6 定位节点坐标 y 的 RMSE 在不同信息传输率下的变化

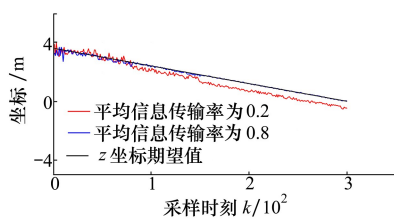


图 7 定位节点坐标 z 在不同信息传输率下的变化

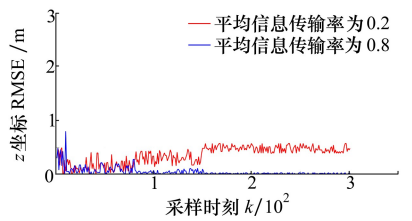


图 8 定位节点坐标 z 的 RMSE 在不同信息传输率下的变化

根据图 3~8 可知:①平均信息传输率越高,定位节点的定位精度越高,当 $\xi \rightarrow 1$ 时,估计器接收的测量值越来越多,MMSE 估计器越来越接近标准 KF 形式;②可调参数 j 能够有效调整平均信息传输率 ξ ,因此本文设计的 MMSE 估计器能够针对不同应用场景需求,调整对应需求的平均信息传输率。

下面进行第 3 个仿真实验,对 4 种估计器性能的比较将从 4 个方面展开:①定位精度 r_m 的比较;②估计误差协方差矩阵的迹 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 的比较;③ $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 稳态的采样时刻 k_s 比较;④1 个采样周期内完成 1 次完整解算所消耗的时间 t_c 比较。

定义定位精度 r_m 为

$$r_m = \frac{1}{3} \left(\frac{\sum_{k=1}^{301} r_{m,x}(k)}{301} + \frac{\sum_{k=1}^{301} r_{m,y}(k)}{301} + \frac{\sum_{k=1}^{301} r_{m,z}(k)}{301} \right)$$

对每一种 MMSE 估计器,按照第 2 个仿真实验的环境,依次令 $\xi=0.1,0.2,\dots,0.9$,得到 4 种估计器在不同平均信息传输率下的定位精度如图 9 所示。

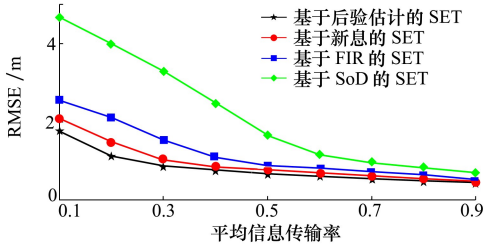


图 9 不同平均信息传输率下 4 种估计器的定位精度比较

根据图 9 可知:①4 种估计器在平均信息传输率 $\xi \rightarrow 1$ 时,定位精度几乎相同,实际上 4 种估计器均为类 KF 形式的 MMSE 估计器,只是触发机制不同;②本文设计的 MMSE 估计器具有更好的定位精度,尤其是在 ξ 较小时,这说明了基于后验估计的 SET 机制能够有效选取对估计器重要的测量值。

令 $\xi = 0.5$,按第 2 个仿真实验的环境,4 种估计器的 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 随采样时刻的变化如图 10 所示。

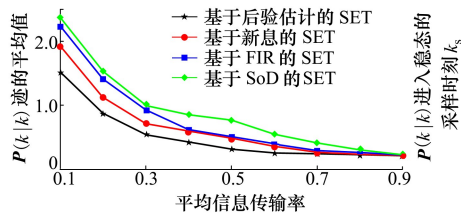


图 11 不同平均信息传输率下 4 种估计器的 $\bar{\mathbf{P}}$ 比较

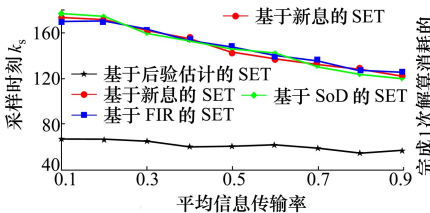


图 12 不同平均信息传输率下 4 种估计器的 k_s 比较

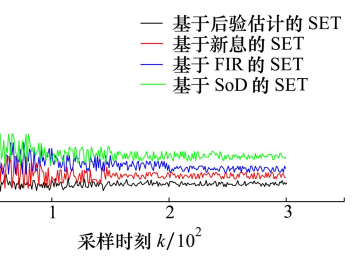


图 10 $\xi = 0.5$ 时 4 种估计器的 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 比较

根据图 10 可知:①4 种估计器均满足稳定性,且基于后验估计的 MMSE 估计器 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 稳态性能优于其他估计器;②基于后验估计的 MMSE 估计器动态性能优于其他估计器,且 4 种估计器 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 进入稳态的采样时刻不同。

受到 $\xi = 0.5$ 情景的启发,定义 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 的平均值为 $\bar{\mathbf{P}} = \sum_{k=1}^{301} \text{tr}(\mathbf{P}(k|k))/301$,定义 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$ 进入稳态的采样时刻为 k_s ,定义采样周期 $[k, k+1)$ 内完成 1 次完整解算所消耗的时间为 $t_c(k)$,1 个采样周期内完成 1 次完整解算所消耗的时间 $t_c = \sum_{k=1}^{301} t_c(k)/301$,则 4 种估计器的 $\bar{\mathbf{P}}$ 与 ξ 的关系如图 11 所示;4 种估计器的 k_s 与 ξ 的关系如图 12 所示;4 种估计器的 t_c 与 ξ 的关系如图 13 所示。

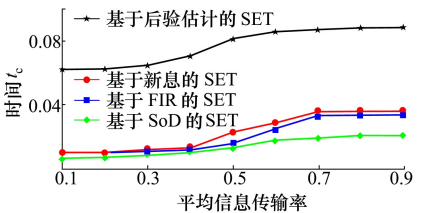


图 13 不同平均信息传输率下 4 种估计器的 t_c 比较

根据图 11~13 可知:①当平均信息传输率 $\xi \rightarrow 1$ 时,4 种估计器的 $\bar{\mathbf{P}}$ 趋于一致;②当 ξ 较小时,本文设计的 MMSE 估计器的 $\bar{\mathbf{P}}$ 明显小于其他 3 种估计器;③本文设计的 MMSE 估计器 k_s 受 ξ 的影响不大,而其他 3 种估计器 k_s 的变化几乎相同,实际上,其他 3 种估计器的 SET 机制只需要考虑当前时刻的测量值,因此随着 ξ 的增大,接收到的测量值信息越多,从而更早进入稳态。另一方面,通过(38)式可知,基于后验估计的 SET 不仅要考虑当前时刻测量值,而且要考虑二阶矩信息。因此即使在 ξ 较小时,估

计器仍然能够通过二阶矩信息有效筛选出对一步预测修正重要的信息,从而使得本文设计的 MMSE 估计器能够更早进入稳态;④尽管二阶矩信息使得本文设计的 MMSE 估计器的 $\text{tr}(\mathbf{P}(k|k))$, $\bar{\mathbf{P}}$ 与 k_s 均具备更好的解算效果,但是 t_c 明显大于其他 3 种估计器。

最后进行第 4 个仿真实验,通过 Monte Carlo 模拟来获取平均信息传输率与 $g(k)$ 的关系。设模拟次数为 500,定义 $g = \sum_{k=1}^{500} g(k)/500$,依次令 $\xi = 0,$

0.1, 0.2, ..., 0.9, 则 g 与 ξ 的关系如图 14 所示。

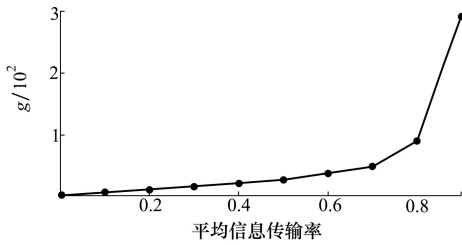


图 14 g 与平均信息传输率的关系图

根据图 14 可知:①当 $\xi \rightarrow 1$ 时, g 越来越大, 这说明了平均信息传输率较大时, 一阶矩信息 $\|\delta(k)\|_{K^T(k)JK(k)}^2$ 占主导地位, 二阶矩信息 $\rho(k)$ 对 SET 机制的影响程度非常小;②当 ξ 较小时, $\|\delta(k)\|_{K^T(k)JK(k)}^2$ 和 $\rho(k)$ 对 SET 机制均有影响, $\xi \rightarrow 0$ 时, g 趋近于 1。因此, 一阶矩信息 $\|\delta(k)\|_{K^T(k)JK(k)}^2$ 对 SET 机制的影响是主要的, 二阶矩信息 $\rho(k)$ 只有在 ξ 较小时才与一阶矩信息共同影响 SET 机制。

4 结 论

1) Bayes 理论下具有 SET 机制的 MMSE 估计器在不同的平均信息传输率下均能较好地完成状态

估计, 例如 $\xi=0.2$ 时, PSET 定位精度为 1.132 m, 而 ISET 定位精度为 1.508 m, FSET 为 2.117 m, SSET 为 4.005 m; $\xi=0.8$ 时, PSET 定位精度为 0.501 m, 而 ISET 定位精度为 0.546 m, FSET 为 0.649 m, SSET 为 0.840 m。

2) 后验估计是估计中最全面的信息, 基于后验估计的 SET 机制能够选出对估计器重要的测量值。

3) PSET 与 ISET、FSET、SSET 最大的区别在于二阶矩信息, 且当平均信息传输率较小时, 一阶矩信息和二阶矩信息均对 SET 机制有影响, 而当平均信息传输率增大时, 二阶矩信息对 SET 机制的影响程度越来越小。

4) 由于对二阶矩信息的利用, 通过 PSET 推导得到的 MMSE 估计器从定位精度、动态性能、稳态性能的角度出发具备更好的估计效果。与此同时, 二阶矩信息的利用增大了估计器的计算复杂度, 如何降低估计器的计算复杂度并将结论推广至多节点情景是下一步研究的重点。

5) 通过对平均信息传输率上界和下界的推导, 为调整矩阵的选取提供理论依据, 且仿真实验证明, 调整矩阵能够有效调整平均信息传输率。

6) 本文估计器针对的是系统噪声和量测噪声满足 Gaussian 性的系统模型。对于非 Gaussian 噪声、能量有界噪声、幅值有界噪声等复杂噪声环境下的 SET 机制设计是下一步研究中需要考虑的问题。

参考文献:

- [1] Gao Chao, Lu Jianhua, Zhao Guorong, et al. Decentralized navigational state estimation for networked navigation systems with finite channel capacity and randomly switching topologies[J]. Aerospace Engineering, 2018, 232(2): 201-214.
- [2] Hu Zhongyao, Chen Bo, Wan Rusheng, et al. Multi-sensor state estimation with a sequential stochastic event-triggered mechanism[J]. IEEE Trans on Signal and Information Processing over Networks, 2025, 11(1): 342-352.
- [3] Liu Wei. Event-triggered state estimation through confidence level[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2025, 73(2): 1337-1350.
- [4] Meng Rui, Hua Changchun, Li Kuo, et al. Estimated states-based event-triggered control for interconnected nonlinear systems with hybrid stochastic faults[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2025, 55(4): 3064-3073.
- [5] Grigorescu A, Boche H, Schaefer R F, et al. Capacity of finite state channels with feedback: algorithmic and optimization theoretic properties[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2024, 70(8): 5413-5426.
- [6] Li Feng, Wang Yanan, Shen Hao. Dual event-triggered synchronization of two-time-scale jumping neural networks and its application in image encryption and decryption[J]. IEEE Trans on Network Science and Engineering, 2025, 12(2): 943-954.
- [7] Liu Jia, Liu Jiapeng, Wang Qingguo, et al. Adaptive neural network finite-time event triggered intelligent control for stochastic nonlinear systems with time-varying constraints[J]. IEEE Trans on Artificial Intelligence, 2025, 6(3): 773-779.
- [8] 赵国荣, 韩旭, 王康. 具有传感器增益退化、传输时延和丢包的离线状态估计器[J]. 自动化学报, 2020, 46(3):

540-548.

Zhao Guorong, Han Xu, Wang Kang. Offline state estimator with sensor gain degradation, transmission delay, and packet loss [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(3): 540-548. (in Chinese)

- [9] Zhang Xianming, Han Qinglong, Zhang Baolin. An overview and deep investigation on sampled-data-based event-triggered control and filtering for networked systems[J]. *IEEE Trans on Industrial Informatics*, 2017, 13(1): 4-16.
- [10] Wu Junfeng, Jia Qingshan, Johansson K H, et al. Event-based sensor data scheduling: trade-off between communication rate and estimation quality[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2013, 58(4): 1041-1046.
- [11] You Keyou, Xie Lihua. Kalman filtering with scheduled measurements[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(6): 1520-1530.
- [12] Shi Dawei, Chen Tongwen, Shi Lin. On set-valued Kalman filtering and its application to event-based state estimation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2015, 60(5): 1275-1290.
- [13] Shi D, Chen T, Shi L. An event-triggered approach to state estimation with multiple point-and set-valued measurements[J]. *Automatica*, 2014, 50(6): 1641-1648.
- [14] Trimpe S, Andrea R D. Event-based state estimation with variance-based triggering[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(12): 3266-3281.
- [15] He Lidong, Chen Jiming, Qi Yifei. Event-based state estimation: optimal algorithm with generalized closed skew normal distribution[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2019, 64(1): 321-328.
- [16] Han Duo, Mo Yilin, Wu Junfeng, et al. Stochastic event-triggered sensor schedule for remote state estimation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2015, 60(10): 2661-2675.
- [17] Xu Liang, Mo Yilin, Xie Lihua. Remote state estimation with stochastic event-triggered sensor schedule and packet drops[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2020, 65(11): 4981-4988.
- [18] Mohammadi A, Plataniotis K N. Event-based estimation with information-based triggering and adaptive update[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2017, 65(18): 4924-4939.
- [19] Huang Jiarao, Shi Dawei, Chen Tongwei. Event-triggered state estimation with an energy harvesting sensor[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2017, 62(9): 4768-4775.
- [20] Deng Di, Xiong Junlin. Kalman-like filter for event-triggered remote state estimation over an additive noise channel[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2024, 8(11): 205-210.
- [21] Alavi S A, Mehran K, Hao Yang. Optimal observer synthesis for microgrids with adaptive send-on-delta sampling over iot communication networks[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2021, 68(11): 11318-11327.
- [22] Schmitt E J, Noack B, Krippner W, et al. Gaussianity-preserving event-based state estimation with an FIR-based stochastic trigger[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, 3(3): 769-774.
- [23] Hu Zhongya, Chen Bo, Wang Rusheng. Remote state estimation with posterior-based stochastic event-triggered schedule[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2024, 69(2): 1194-1201.
- [24] Chundawat V S, Tarun A K, Mandal M, et al. A universal metric for robust evaluation of synthetic tabular data[J]. *IEEE Trans on Artificial Intelligence*, 2024, 5(1): 300-309.
- [25] 时宝, 刘孝磊, 盖明久, 等. 实用矩阵分析基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2017.
Shi Bao, Liu Xiaolei, Gai Mingjiu, et al. *Fundamental to practical matrix analysis*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2017. (in Chinese)
- [26] Chen Chunheng, Song Zhiyuan, Wu Keer, et al. A novel solution for solving time-varying algebraic riccati equations and its application to sound source tracking[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2025, 25(7): 11155-11166.
- [27] Zhang Liyang, Chen Xinlei, Lu Lichang, et al. Efficient solution of wideband partial modification problem via wideband Sherman-Morrison-Woodbury algorithm[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2024, 23(12): 4862-4866.
- [28] Qu Z. Robust control of a class of nonlinear uncertain systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1437-1442.
- [29] Zou Lang, Liu Xiangbin, Su Hongye, et al. Learning-based robust adaptive rapid exponential stabilization for a class of nonlinear CPSs under DoS attacks[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, 55(3): 1898-1911.
- [30] Olkin I, Pukelsheim F. The distance between two random vectors with given dispersion matrices[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1982, 48(1): 257-263.

State estimation of DDS-DNNS with stochastic event-triggered mechanism under Bayes theory

Gu Haolun, Dai Shaowu, Wan Bing

(Coast Guard Academy, Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

Abstract: Addressing the state estimation problem of a single positioning node in a decentralized networked navigation system based on data distribution service (DDS-DNNS), considering node energy constraints and sensor gain degradation, a minimum mean square error (MMSE) state estimator for DDS-DNNS with a stochastic event-triggered (SET) mechanism is designed based on Bayesian theory. The SET mechanism determines the importance of measurement values by comparing the differences in posterior estimates corresponding to the transmitted measurement values. Based on this, the Wasserstein distance is selected as a metric to represent the difference in posterior estimates. The properties of the Wasserstein distance and Bayes' theorem are utilized to prove that the posterior estimate is Gaussian, thereby obtaining the Kalman-like filter recursive form of the estimator and the explicit expression of the SET mechanism. Subsequently, it is proven that the prediction error covariance of the estimator is bounded, and both the upper and lower bounds converge. Meanwhile, it is demonstrated that the average information transmission rate is bounded, and the expressions for the upper and lower bounds are derived. Finally, a numerical simulation is conducted to illustrate how to determine the adjustment matrix through the upper and lower bounds of the average information transmission rate. The impact of first-order moment information and second-order moment information on the SET mechanism is simulated, and the effectiveness of the estimator is verified through comparative experiments.

Keywords: Bayes theory; stochastic event-triggered; Kalman filter; posterior estimation; minimum mean square error state estimation

引用格式: 顾昊伦, 戴邵武, 万兵. Bayes 理论下具有随机事件触发机制的 DDS-DNNS 状态估计[J]. 西北工业大学学报, 2026, 44(1): 112-124.

Gu Haolun, Dai Shaowu, Wan Bing. State estimation of DDS-DNNS with stochastic event-triggered mechanism under Bayes theory[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2026, 44(1): 112-124. (in Chinese)